Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab; Kateřina Fišerová
Surdická vyjádření přirozených čísel I

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 2, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146866

Surdická vyjádření přirozených čísel I

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu – Kateřina Fišerová, Praha

Abstract. The aim of this note is to help in understanding of certain surdic presentations of natural numbers.

Patrně jste se už setkali s rovnostmi typu

$$\begin{aligned}\sqrt{37+20\sqrt{3}}+\sqrt{37-20\sqrt{3}}&=10,\\ \sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}&=10,\end{aligned}\tag{1}$$

nebo

$$\begin{aligned}\sqrt{49+20\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{49+20\sqrt{6}}}&=10,\\ \sqrt{51+10\sqrt{26}}-\frac{1}{\sqrt{51+10\sqrt{26}}}&=10.\end{aligned}\tag{2}$$

Několik poznámek o podobných vyjádřeních přirozených čísel publikoval J. Pšenička v [4]. Několik příkladů je též uvedeno v článcích [2, 3, 5].

Snažme se porozumět těmto rovnostem hlouběji. Všechny obsahují výrazy typu

$$\sqrt{d},\quad \text{kde } d=a\pm b\sqrt{c} \text{ je nezáporné reálné číslo.}$$

Budeme tedy studovat tzv. *surdické výrazy* typu

$$\sqrt{a+\sqrt{h}}\pm\sqrt{a-\sqrt{h}}\qquad\text{či}\qquad\sqrt{a+\sqrt{h}}\pm\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{h}}}$$

pro celá nezáporná čísla a a h.

Samozřejmě, že $\sqrt{h}$ můžeme vyjádřit ve tvaru $\sqrt{h}=b\sqrt{c}$, kde b, c jsou celá čísla splňující podmínku, že c nemá dělitele p^2 pro žádné prvočíslo p. Tak např. $\sqrt{2\,940}$ vyjádříme ve tvaru $\sqrt{2\,940}=14\sqrt{15}$.

Zajisté nás napadne otázka, zdali je možné vyjádřit každé přirozené číslo n ve tvaru

$$n=\sqrt{a+\sqrt{h}}+\sqrt{a-\sqrt{h}}\quad\text{či}\quad n=\sqrt{a+\sqrt{h}}-\sqrt{a-\sqrt{h}}\tag{3}$$

a zdali je takové vyjádření jednoznačné. Zcela snadno vidíme, že každé takové celé číslo

$$n = \sqrt{a + \sqrt{h}} \pm \sqrt{a - \sqrt{h}}$$

musí být sudé, neboť umocněním rovností (3) dostáváme rovnost

$$n^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - h}. \tag{4}$$

Pišme tedy $n = 2m$, kde $m \geq 0$ je celé číslo. Potom

$$2m^2 = a \pm \sqrt{a^2 - h},$$

a tedy

$$a^2 - h = 4m^4 + a^2 - 4m^2 a,$$

odkud

$$h = 4m^2(a - m^2).$$

Jelikož $h \geq 0$, je $a = m^2 + c$, kde $c \geq 0$ je celé číslo a $h = 4m^2 c$. Vztah (4) lze tedy přepsat do tvaru

$$n^2 = 4m^2 = 2(m^2 + c) \ \pm 2\sqrt{(m^2 - c)^2}.$$

Zde si musíme uvědomit, že

$$\sqrt{(m^2 - c)^2} = m^2 - c \quad \text{pro } c \leq m^2$$

a

$$\sqrt{(m^2 - c)^2} = c - m^2 \quad \text{pro } c \geq m^2.$$

Proto pro $c \leq m^2$ platí rovnost

$$n^2 = 4m^2 = 2(m^2 + c) + 2(m^2 - c)$$

neboli

$$n = \sqrt{m^2 + c + 2m\sqrt{c}} + \sqrt{m^2 + c - 2m\sqrt{c}},$$

zatímco pro $c \geq m^2$ platí rovnost

$$n^2 = 4m^2 = 2(m^2 + c) - 2(c - m^2)$$

neboli

$$n = \sqrt{m^2 + c + 2m\sqrt{c}} - \sqrt{m^2 + c - 2m\sqrt{c}}.$$

Vyjádření (1) přirozených čísel surdickými výrazy by tedy neměla být velkým překvapením. Vždyť

$$\sqrt{m^2+c+2m\sqrt{c}}=\sqrt{(m+\sqrt{c})^2}=m+\sqrt{c}$$

pro všechna nezáporná čísla c, a zcela podobně

$$\sqrt{m^2+c-2m\sqrt{c}}=m-\sqrt{c}$$

nebo

$$\sqrt{m^2+c-2m\sqrt{c}}=\sqrt{c}-m$$

v závislosti na tom, zda $c \le m^2$ či $c \ge m^2$; odtud už všechno plyne.

Shrňme naše poznatky v následující větě.

Věta 1. *Vyjádření přirozeného čísla n výrazem typu*

$$\sqrt{a+\sqrt{h}}+\sqrt{a-\sqrt{h}},$$

tj. první z rovností (3), existuje pouze pro sudá čísla n. Je-li $n=2m$, potom existuje takových vyjádření m^2, totiž

$$n=\sqrt{m^2+c+2m\sqrt{c}}+\sqrt{m^2+c-2m\sqrt{c}}=(m+\sqrt{c})+(m-\sqrt{c}),$$

kde $c \in \{0,1,2,\dots,m^2-1\}$. Z toho pro $c \in \{0,1,2^2,\dots,(m-1)^2\}$ je m rovností redukováno do tvarů

$$n=m+m=$$
$$=(m+1)+(m-1)=\dots=(m+k)+(m-k)=\dots=(2m-1)+1.$$

Pro $c=m^2$ dostáváme redukovaný tvar $n=2m\pm 0$. Vyjádření přirozených čísel, která nelze redukovat do takovýchto jednoduchých tvarů, nazveme ryzí.

Vyjádření čísla n ve tvaru $n=\sqrt{a+\sqrt{h}}-\sqrt{a-\sqrt{h}}$ je nekonečně mnoho. Pro každé $c \in \{m^2+t \mid t=1,2,\dots\}$ dostáváme

$$n=\sqrt{m^2+c+2m\sqrt{c}}-\sqrt{m^2+c-2m\sqrt{c}}=(m+\sqrt{c})-(\sqrt{c}-m).$$

Z nich jsou opět ta, pro něž c není mocninou přirozeného čísla, ryzí.

Ilustrujme větu 1 názorně pro číslo $n = 6$, tedy $m = 3$. Existuje následujících $6 = m^2 - m$ ryzích surdických součtů vyjadřujících číslo 6:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6$$
$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{12-6\sqrt{3}}=6$$
$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=6,$$
$$\sqrt{15+6\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}=6,$$
$$\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}=6$$
$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=6$$

Ryzích surdických rozdílů vyjadřujících číslo 6 existuje nekonečně mnoho:

$$\sqrt{19+6\sqrt{10}}-\sqrt{19-6\sqrt{10}}=6$$
$$\sqrt{20+6\sqrt{11}}-\sqrt{20-6\sqrt{11}}=6$$
$$\sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}=6$$
$$\sqrt{22+6\sqrt{13}}-\sqrt{22-6\sqrt{13}}=6$$
$$\sqrt{23+6\sqrt{14}}-\sqrt{23-6\sqrt{14}}=6$$
$$\sqrt{24+6\sqrt{15}}-\sqrt{24-6\sqrt{15}}=6$$
$$\sqrt{26+6\sqrt{17}}-\sqrt{26-6\sqrt{17}}=6$$
$$\sqrt{27+18\sqrt{2}}-\sqrt{27-18\sqrt{2}}=6$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Přitom je

$$\begin{aligned}6 &= \sqrt{9+0}+\sqrt{9-0}=\sqrt{10+6}+\sqrt{10-6}=\\ &=\sqrt{13+12}+\sqrt{13-12}=\sqrt{18+18}\pm\sqrt{18-18}=\\ &=\sqrt{25+24}-\sqrt{25-24}=\sqrt{34+30}-\sqrt{34-30}=\ldots,\end{aligned}$$

tj.

$$\sqrt{9+c^2+6c}-\sqrt{9+c^2-6c}=(c+3)-(c-3)=6$$

pro celá čísla $c \geq 3$.

Poslední rovnosti jsou spřízněny se zajímavou úlohou J. Zhoufa (Úloha č. 25 v [5]):

Určete všechna přirozená čísla a, pro která je $\sqrt{a+2012}+\sqrt{a-2012}$ číslo celé.

Řešení, publikované v Rozhledech matematicko-fyzikálních na str. 58 třetího čísla ročníku 87 (2012) ukazuje, že taková čísla jsou dvě:

$$a = 253\,013 \quad \text{a} \quad a = 1\,012\,037.$$

Pokusme se zodpovědět otázku, proč má tato úloha právě dvě řešení. Za tímto účelem uvažujme obecnější úlohu, v níž na místo čísla 2 012 dosadíme libovolné celé číslo b. Bezprostředně vidíme, že pro to, aby

$$n=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$$

bylo přirozené číslo, je nutné, aby b bylo sudé. To odvodíme snadno. Už dříve jsme viděli, že n je sudé číslo, tedy $n=2m$, a z rovnosti

$$2m=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$$

plyne ihned (stejně jako v úvaze týkající se vztahů (3) a (4)), že

$$b^2=4m^2(a-m^2),$$

a proto musí být číslo b sudé. Pišme $b=2r$, kde r je přirozené číslo. Hledáme tedy čísla a taková, že

$$\sqrt{a+2r}+\sqrt{a-2r}=n=2m.$$

Umocněním obou stran obdržíme rovnost

$$r^2=m^2(a-m^2),$$

což znamená, že $r=ms$ a $a=m^2+s^2$ pro libovolný rozklad čísla r v součin dvou dělitelů.

Tak např. pro $b=2\,012$ z úlohy 25 je $r=1\,006$ a $1\,006=1\cdot 1\,006$ nebo $1\,006=2\cdot 503$. V prvním případě $a=1^2+1\,006^2=1\,012\,037$, v druhém případě $a = 2^2 + 503^2 = 253\,013$. Dvě řešení odpovídají dvěma rozkladům čísla 1 006.

V obecném případě nechť

$$r = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$$

s různými prvočísly p_j a kladnými k_j pro $1 \leq j \leq t$ je prvočíselný rozklad přirozeného čísla r. Jelikož každý dělitel s čísla r má tvar

$$s = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_t^{l_t},$$

kde $0 \leq l_j \leq k_j$ pro $1 \leq j \leq t$, počet $d(r)$ všech dělitelů čísla r je $d(r) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_t + 1)$. Proto počet $f(r)$ všech různých rozkladů čísla r v součin dvou činitelů je

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(d(r) + 1), & \text{pokud } r = e^2 \text{ pro přirozené číslo } e, \\ \frac{1}{2}\,d(r), & \text{pokud tomu tak není.} \end{cases}$$

Rozklad $r = 360$ $m \cdot s$	Řešení $b = 720$ výraz $= 2m$	Řešení $b = 720$ výraz $= 2s$
$360 \cdot 1$	$\sqrt{129\,601 + b} + \sqrt{129\,601 - b} = 720$	$\sqrt{129\,601 + b} - \sqrt{129\,601 - b} = 2$
$180 \cdot 2$	$\sqrt{32\,404 + b} + \sqrt{32\,404 - b} = 360$	$\sqrt{32\,404 + b} - \sqrt{32\,404 - b} = 4$
$120 \cdot 3$	$\sqrt{14\,409 + b} + \sqrt{14\,409 - b} = 240$	$\sqrt{14\,409 + b} - \sqrt{14\,409 - b} = 6$
$90 \cdot 4$	$\sqrt{8\,116 + b} + \sqrt{8\,116 - b} = 180$	$\sqrt{8\,116 + b} - \sqrt{8\,116 - b} = 8$
$72 \cdot 5$	$\sqrt{5\,209 + b} + \sqrt{5\,209 - b} = 144$	$\sqrt{5\,209 + b} - \sqrt{5\,209 - b} = 10$
$60 \cdot 6$	$\sqrt{3\,636 + b} + \sqrt{3\,636 - b} = 120$	$\sqrt{3\,636 + b} - \sqrt{3\,636 - b} = 12$
$45 \cdot 8$	$\sqrt{2\,089 + b} + \sqrt{2\,089 - b} = 90$	$\sqrt{2\,089 + b} - \sqrt{2\,089 - b} = 16$
$40 \cdot 9$	$\sqrt{1\,681 + b} + \sqrt{1\,681 - b} = 80$	$\sqrt{1\,681 + b} - \sqrt{1\,681 - b} = 18$
$36 \cdot 10$	$\sqrt{1\,396 + b} + \sqrt{1\,396 - b} = 72$	$\sqrt{1\,396 + b} - \sqrt{1\,396 - b} = 20$
$30 \cdot 12$	$\sqrt{1\,044 + b} + \sqrt{1\,044 - b} = 60$	$\sqrt{1\,044 + b} - \sqrt{1\,044 - b} = 24$
$24 \cdot 15$	$\sqrt{801 + b} + \sqrt{801 - b} = 48$	$\sqrt{801 + b} - \sqrt{801 - b} = 30$
$20 \cdot 18$	$\sqrt{724 + b} + \sqrt{724 - b} = 40$	$\sqrt{724 + b} - \sqrt{724 - b} = 36$

Tab. 1: Rozklady čísla 360 a odpovídající surdické výrazy

Vyjádřeme naše poznatky v následující větě.

Věta 2. *Diofantická rovnice*

$$\sqrt{x+b}+\sqrt{x-b}=y, \tag{5}$$

kde b je dané přirozené číslo, má nenulová (celočíselná) řešení x, y pouze tehdy, když číslo b je sudé. Nechť $b=2r$ a $f(r)$ je počet různých rozkladů čísla r na součin dvou dělitelů. Potom má rovnice (5) *$f(r)$ různých řešení. Přitom rozkladu $r=ms$, $m\geq s$, odpovídá řešení $x=m^2+s^2$, $y=2m$. Dvojice $x=m^2+s^2$, $y=2s$ je analogickým řešením diofantické rovnice*

$$\sqrt{x+b}-\sqrt{x-b}=y.$$

Ilustrujme větu 2 názorně pro číslo $b=720$, tedy $r=360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$. Číslo 360 má tedy $4\cdot 3\cdot 2=24$ dělitelů a $f(360)=12$. V tab. 1 jsou všechny rozklady i s příslušnými rovnostmi zaznamenány.

Poznamenejme, že pro $b=2r$, kde r je prvočíslo, dostáváme jediné řešení. Např. pro $b=200\,006$, a tedy $r=100\,003$, je takovým výrazem

$$\sqrt{10\,000\,600\,009+200\,006}+\sqrt{10\,000\,600\,009-200\,006}=200\,006$$

představující triviální rovnost $(r+1)+(r-1)=2r$.

Nyní se ještě obraťme k rovnostem typu (2). Ty jsou velmi těsně svázány s rovnostmi typu (1), neboť

$$\begin{aligned}2m=\sqrt{a+b\sqrt{c}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{c}}&=\\ =\sqrt{a+b\sqrt{c}}\pm\frac{(\sqrt{a-b\sqrt{c}})(\sqrt{a+b\sqrt{c}})}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}&=\\ =\sqrt{a+b\sqrt{c}}\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2c}}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}&,\end{aligned}$$

kde je, s odkazem na větu 1,

$$a^2-b^2c=(m^2+c)^2-4m^2c=(m^2-c)^2.$$

Proto

$$2m=\sqrt{a+b\sqrt{c}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{c}}=\sqrt{a+b\sqrt{c}}\pm\frac{1}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}$$

právě tehdy, když $(m^2 - c)^2 = 1$, tj. když $c = m^2 \mp 1$. Prostě je

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a - b\sqrt{c}}}.$$

Můžeme tedy formulovat následující větu.

Věta 3. *Pro každé sudé přirozené číslo $n = 2m$ existuje právě jedno vyjádření tvaru*

$$n = \sqrt{a + b\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a + b\sqrt{c}}} = \sqrt{a - b\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a - b\sqrt{c}}}$$

s přirozenými čísly a, b, c. Přitom $a = 2m^2 - 1$, $b = 2m$ a $c = m^2 - 1$. Stejně tak existuje právě jedna rovnost

$$n = \sqrt{a + b\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a + b\sqrt{c}}} = -\sqrt{a - b\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a - b\sqrt{c}}}$$

s přirozenými čísly a, b, c. V tomto případě $a = 2m^2 + 1$, $b = 2m$ a $c = m^2 + 1$. Pro lichá n takové rovnosti typu (2) neexistují.

Ukázkou nám mohou posloužit např. rovnosti pro číslo $n = 6$. Zde je $m = 3$, $2m^2 - 1 = 17$, $2m^2 + 1 = 19$, $2m\sqrt{m^2 - 1} = 6\sqrt{8} = 12\sqrt{2}$ a $2m\sqrt{m^2 + 1} = 6\sqrt{10}$, takže

$$6 = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}} = \sqrt{19 + 6\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{19 + 6\sqrt{10}}}$$

neboli

$$6 = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{10} - \frac{1}{3 + \sqrt{10}}.$$

Podobně snadno zkontrolujeme, že např.

$$50 = \sqrt{1\,249 + 200\sqrt{39}} + \frac{1}{\sqrt{1\,249 + 200\sqrt{39}}} = 25 + 4\sqrt{39} + \frac{1}{25 + 4\sqrt{39}},$$

$$50 = \sqrt{1\,251 + 50\sqrt{626}} - \frac{1}{\sqrt{1\,251 + 50\sqrt{626}}} = 25 + \sqrt{626} + \frac{1}{25 + \sqrt{626}},$$

$$100 = \sqrt{4\,999 + 700\sqrt{51}} + \frac{1}{\sqrt{4\,999 + 700\sqrt{51}}} =$$
$$= 50 + 7\sqrt{51} + \frac{1}{50 + 7\sqrt{51}},$$

$$100 = \sqrt{5\,001 + 100\sqrt{2\,501}} - \frac{1}{\sqrt{5\,001 + 100\sqrt{2\,501}}} =$$
$$= 50 + \sqrt{2\,501} + \frac{1}{50 + \sqrt{2\,501}}.$$

Získali jsme tedy možnost tvorby nesmírného množství vyjádření přirozených čísel ve tvaru surdických výrazů.

Závěrem zopakujme, že na surdické výrazy, které bývaly součástí středoškolské výuky, s malou historickou poznámkou upozornil J. Pšenička v [4]. Učinil tak v rámci otázek týkajících se druhých odmocnin prvků z okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{c}]$ všech reálných čísel tvaru $a + b\sqrt{c}$, kde a, b jsou libovolná celá čísla. Stejné vzorce ilustrovali na příkladech D. Hrubý v [3], E. Calda v [2] a S. Trávníček v [5]. Surdickým výrazům je též věnována řada poznámek v učebnici [1].

L i t e r a t u r a

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* SERIFA, Praha, 2016.

[2] Hrubý, D.: Surdické výrazy. *Učitel matematiky*, roč. 7 (1998), č. 1, s. 9–13.

[3] Calda, E.: Dají se výrazy $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ zjednodušit? *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 87 (2012), č. 3, s. 26–29.

[4] Pšenička, J.: Surdické výrazy. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 56 (1978), č. 4, s. 158–161.

[5] Trávníček, S.: O jistých složených iracionalitách. *Matematika–fyzika–informatika*, roč. 17 (2007), č. 2, s. 65–70.

[6] Zhouf, J.: Úloha 25 a její řešení. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 87 (2012), č. 3, s. 58–59.