Vítězslav Kala

Rozdělování pokladu mezi loupežníky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 1, 35–36

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146736`

Rozdělování pokladu mezi loupežníky

Vítězslav Kala, MFF UK Praha

Abstract. We discuss the problem of dividing a treasure among several thieves if we do not have an objective measure of the value of individual items in the treasure.

V nedávném čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních vyšel zajímavý článek [1] o tom, jak naprogramovat rozdělení uloupeného pokladu složeného z drahokamů a cihel zlata mezi několik loupežníků, pokud známe cenu jednotlivých drahokamů a cihel zlata. Ovšem, jak zná každý protřelý člen loupeživé bandy z vlastní zkušenosti, při rozdělování kořisti toto objektivní ocenění většinou nemáme, a co hůř, různí loupežníci si cení různých částí lupu jinak: Ali je jako vždycky na smaragdy, Baba nedá dopustit na zlato a Kásim s Mardžánou si zálibně prohlížejí bednu whisky.

Zformulujme si tento problém ještě jednou pořádně:

Jak rozdělit velký poklad mezi n loupežníků tak, aby každý z nich měl jistotu, že bude se svým dílem spokojený, nezávisle na chování ostatních? Loupežník je spokojený, pokud má pocit, že získal alespoň jednu n-tinu pokladu (podle svého subjektivního ocenění).

Takto je úloha zformulována např. v publikaci [2, s. 7]. My zde pro zjednodušení oproti původní úloze [1] předpokládáme, že poklad jde dostatečně dělit.

Skoro každý, kdo má jednoho sourozence, nejspíš někdy tento problém řešil, když se museli rozdělit o zákusek. Postup v případě $n = 2$ je jednoduchý – jeden z nich zákusek rozdělí na dvě poloviny a ten druhý si vybere, kterou půlku chce.

Už ale když jsou děti nebo loupežníci tři, je situace o dost složitější. Člověku by se třeba mohlo zdát, že postup „loupežník Ali poklad rozdělí na třetiny, jednu z nich si vybere Baba, a pak si jednu vybere Kásim“ bude fungovat. Jenže Ali s Babou se můžou smluvit proti Kásimovi na tom, že Ali poklad rozdělí na dvě hodně malé „třetiny“ a na velký zbytek. Ten si pak vybere Baba a později se o něj stranou podělí s Alim – a chudák Kásim dostane jen jednu z malých částí.

Než budete číst dál, schválně se zkuste sami zamyslet nad tím, jak byste poklad dělili! Není to tak jednoduché, jak by se mohlo zdát; s kamarádem Kriketem jsme na středoškolských soustředěních vyhráli spoustu čokolády odhalováním chyb ve strategiích, které navrhli ostatní kamarádi.

Jeden postup, který funguje v případě tří loupežníků, je tento: Ali s Babou si napřed rozdělí poklad na poloviny tak, jako sourozenci. Každý z nich pak svůj díl rozdělí na třetiny a vždycky jednu z těchto třetin si od každého z nich vybere Kásim.

Ali s výsledným rozdělením bude spokojený: po dělení s Babou měl aspoň jednu polovinu pokladu, tu sám rozdělil na spravedlivé třetiny, z nichž mu dvě zbyly. Celkově má tedy aspoň

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

celého pokladu. Stejně je na tom i Baba.

Z pohledu Kásima si Ali s Babou poklad rozdělili na dvě části velikostí A a B. Z každé z těchto částí si pak Kásim vybral největší třetinu, má tedy aspoň

$$\frac{A}{3} + \frac{B}{3} = \frac{1}{3}$$

pokladu.

A to, jak si poklad spravedlivě rozdělí víc loupežníků, už zvládnete vymyslet sami!

Náš postup pro tři lupiče vyžadoval šest částí – nestačilo by jich méně?

Nabízí se ale i obtížnější problém:

Jaký je nejmenší počet částí, na které je potřeba poklad rozdělit během spravedlivého dělení mezi n loupežníků?

Literatura

[1] Trávníček, S.: Rozdělení na části. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 91 (2016), č. 1, s. 13–18.

[2] Dynkin, J. B. a kol.: *Matematické hlavolamy.* Alfa, Bratislava, 1976.