Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Elementární vlastnosti Fibonacciho čísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 4, 6–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146685

Protože (5) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, odvodili jsme (cestou úvah o množině P_f) rozhodující vlastnost hledané funkce f, kterou je lichost. Nalezení jejího předpisu už bude poměrně snadné.

Nahrazením x opačnou hodnotou $-x$ v rovnosti (3) obdržíme s ohledem na (5) rovnost

$$\begin{gathered} f(-x)+f(-x^2)=-x+xf(-x), \\ -f(x)+f(-x^2)=-x-xf(x). \end{gathered}$$

Odečtením právě získané rovnosti od (3) dostaneme $2f(x) = 2x$, neboli $f(x) = x$, pro každé $x \in \mathbb{R}$. To je, jak víme z předchozího textu, druhé řešení f_2 zadané úlohy. Protože podle našeho postupu žádná jiná vyhovující funkce f neexistuje, je tím celé řešení úlohy u konce.

Literatura

[1] *International Mathematical Olympiad*: `https://www.imo-official.org`
[2] *Matematická olympiáda pro ZŠ a SŠ*: `http://mo.webcentrum.muni.cz`
[3] Davidov, L.: *Funkcionální rovnice.* Mladá fronta, Praha, 1984. `http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404099`
[4] Neuman, F.: *Funkcionální rovnice.* SNTL, Praha, 1986.
[5] Calábek, P., Švrček, J.: Abeceda řešení funkcionálních rovnic. *MFI*, roč. 22 (2013), č. 4. `http://mfi.upol.cz/files/2205/mfi_2205_321_329.pdf`

Elementární vlastnosti Fibonacciho čísel

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with the basic properties of Fibonacci numbers.

Fibonacciho posloupnost

Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský, žil údajně v letech 1170–1250. V jeho sbírce úloh vydané v Pise roku 1202 je úloha o králících vedoucí na číselnou posloupnost, která byla později nazvána posloupností Fibonacciho. Jde o následující úlohu (viz [1]):

Máme párek dospělých králíků a chceme vědět, kolik párů budeme mít po uplynutí jednoho roku, jestliže:
- *žádný králík neuhyne ani se neztratí,*
- *každému dospělému páru se každý měsíc narodí jeden pár,*
- *králíci dospějí po uplynutí jednoho měsíce, do té doby mladé nemají.*

Označíme-li F_n počet králičích párů na konci n-tého měsíce, platí zřejmě

$$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8,\ F_6 = 13,$$

a kdybychom takto pokračovali, zjistili bychom, že na konci roku máme $F_{12} = 233$ párů králíků. Obecně snadno zjistíme, že pro $n > 2$ platí

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Pro posloupnost počtů králičích párů tak platí rekurentní vzorec

$$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pro } n > 2.$$

Tato posloupnost se nazývá Fibonacciho, její členy jsou Fibonacciho čísla; s touto posloupností budeme v následujícím textu pracovat. (V matematice se častěji za Fibonacciho posloupnost považuje posloupnost, která se od této „naší“ liší volbou počátečních podmínek.)

Některé součty Fibonacciho čísel

1. Součet prvních n Fibonacciho čísel:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 2$$

Tento výsledek získáme sečtením n rovností:

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 \\ F_4 &= F_3 + F_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

2. Součet prvních n Fibonacciho čísel s lichými indexy:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$$

Podobně jako výše sečteme n rovností:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_1 \\ F_4 &= F_2 + F_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{2n} &= F_{2n-2} + F_{2n-1} \end{aligned}$$

3. Součet prvních n Fibonacciho čísel se sudými indexy:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

Tento součet dostaneme odečtením rovností:

$$\begin{gathered} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+2} - 2 \\ F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1 \end{gathered}$$

4. Součet druhých mocnin prvních n Fibonacciho čísel:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1} - 1$$

Výsledek dostaneme užitím vztahu

$$F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n = F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n^2$$

a sečtením rovností:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_1 \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 \\ F_3^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

Schodiště a čísla Fibonacciho

Mějme schodiště o n schodech, po kterém jdeme tak, že při každém kroku vynecháme nejvýše jeden schod. Určíme počet $p(n)$ způsobů, jak se takto dá schodiště vyjít.

Všechny způsoby rozložíme do dvou disjunktních tříd podle toho, zda na první schod šlápneme, nebo ho překročíme. Šlápneme-li na první schod, zůstane jich $n-1$, které lze vyjít $p(n-1)$ způsoby; jestliže první schod překročíme, můžeme zbývajících $n-2$ schodů vyjít $p(n-2)$ způsoby. Platí tedy

$$p(n-1)+p(n-2)=p(n),$$

a protože je dále $p(1)=1$ a $p(2)=2$, dostáváme, že počet způsobů zdolání schodiště je

$$p(n)=F_n.$$

Přidejme ke schodišti o n schodech dalších m schodů a jděme po tomto schodišti o $n+m$ schodech výše uvedeným způsobem. Všechny způsoby vyjití – kterých je podle předchozího výsledku F_{n+m} – rozložíme do dvou disjunktních tříd podle toho, zda na n-tý schod šlápneme, nebo zda ho překročíme.

Šlápneme-li na n-tý schod, lze celé schodiště o $n+m$ schodech vyjít F_nF_m způsoby.

Překročíme-li n-tý schod, lze celé schodiště o $n+m$ schodech vyjít $F_{n-1}F_{m-1}$ způsoby.

Platí tedy

$$F_{n-1}F_{m-1}+F_nF_m=F_{n+m}.$$

Položíme-li v této rovnosti $m=n$, dostaneme

$$F_{n-1}^2+F_n^2=F_{2n},$$

neboli *součet druhých mocnin dvou sousedních Fibonacciho čísel je opět Fibonacciho číslo.*

Položíme-li v uvedené rovnosti $m=n+1$, dostaneme snadnou úpravou

$$F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n+1},$$

neboli *rozdíl druhých mocnin dvou Fibonacciho čísel, jejichž indexy se liší o dvě, je opět Fibonacciho číslo.*

Kombinační čísla a čísla Fibonacciho

Připomeňme si nejprve, že počet permutací z n prvků, z nichž jeden se opakuje k_1-krát, druhý k_2-krát, …, n-tý k_n-krát, je

$$P'(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.$$

Odvodíme nyní vzorec pro počet k-členných kombinací s nesousedními členy z n prvků. Tyto prvky očíslujeme čísly $1, 2, \ldots, n$ a za nesousední považujeme ty, které jsou označeny nesousedními čísly v této posloupnosti.

Ilustrace: Všechny trojčlenné kombinace s nesousedními členy z prvků 1, 2, …, 7 jsou $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(1,3,7)$, $(1,4,6)$, $(1,4,7)$, $(1,5,7)$, $(2,4,6)$, $(2,4,7)$, $(2,5,7)$, $(3,5,7)$.

Každou z nich zakódujeme pomocí uspořádané sedmice ze tří jedniček a čtyř nul způsobem, který ukážeme na kombinaci $(3,5,7)$: První dva členy této sedmice jsou dvě nuly, protože čísla 1 a 2 v této kombinaci nejsou; dalším členem sedmice bude jednička, protože číslo 3 v této kombinaci je. Takto pokračujeme a dostaneme uspořádanou sedmici $(0,0,1,0,1,0,1)$. Všimněme si, že mezi každými dvěma jedničkami je vždy aspoň jedna nula! Odtud je vidět, že počet trojčlenných kombinací s nesousedními členy ze sedmi prvků je roven počtu permutací ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje třikrát (jednička), druhý čtyřikrát (nula), přičemž mezi každými dvěma jedničkami je aspoň jedna nula. Z tohoto konkrétního příkladu je zřejmé, že platí:

Počet k-členných kombinací s nesousedními členy z n prvků je roven počtu permutací z jedniček a nul, v nichž se jednička opakuje k-krát, nula $(n-k)$-krát a mezi každými dvěma jedničkami je aspoň jedna nula.

Počet těchto permutací dostaneme takto: Protože mezi každými dvěma jedničkami má být aspoň jedna nula, vložíme do „mezery“ mezi každé dvě jedničky (těchto „mezer“ je $k-1$) právě jednu nulu. Vznikne uspořádaná $(2k-1)$–tice tvaru $101010\ldots10101$, do které je zapotřebí vložit $n-(2k-1)$ nul. Hledaný počet permutací je tedy roven počtu permutací z k jedniček (přičemž $k-1$ z nich si myslíme spojeno s nulou ve tvaru 10) a $n-2k+1$ nul, tj. číslu

$$P'(k, n-2k+1) = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!} = \binom{n-k+1}{k},$$

které udává hledaný počet k-členných kombinací s nesousedními členy z n prvků.

Vrátíme se nyní ke schodišti o n schodech, po kterém vystupujeme výše uvedeným způsobem. Víme už, že počet způsobů zdolání schodiště je roven Fibonacciho číslu F_n. Všechny tyto způsoby rozložíme do disjunktních tříd podle toho, na kolik schodů během výstupu šlápneme. Počet způsobů, jak vyjít schodiště, je:

- nevynecháme-li žádný schod: 1
- vynecháme-li právě jeden (poslední vynechat nelze): $n-1$
- vynecháme-li právě dva (nesmí být sousední!):

$$\binom{(n-1)-2+1}{2} = \binom{n-2}{2}$$

- vynecháme-li právě tři (žádné dva nesmí být sousední):

$$\binom{(n-1)-3+1}{3} = \binom{n-3}{3}$$

Platí tedy:

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

Vzhledem k tomu, že pro $k > n$ je kombinační číslo $\binom{n}{k}$ rovno nule, je tento součet konečný. Platí např.:

$$F_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8.$$

Vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti

Tento vzorec uvedeme bez důkazu:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

Je pozoruhodný tím, že každý člen Fibonacciho posloupnosti – což je přirozené číslo – je vyjádřen iracionálním číslem $\sqrt{5}$.

Zlatý řez a čísla Fibonacciho

Rozdělit úsečku zlatým řezem znamená rozdělit ji na dvě úsečky tak, aby poměr délky celé úsečky a délky její větší části byl roven poměru délky větší a délky menší úsečky. Považujeme-li úsečku, která je rozdělena zlatým řezem, za jednotkovou a označíme-li x délku její větší části, platí

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Odtud snadno vypočteme

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ukážeme nyní, že číslo $\frac{1}{x}$ je limitou posloupnosti

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots,$$

tj. že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vyjdeme ze vzorce pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, ve kterém pro jednoduchost označíme

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = a, \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b;$$

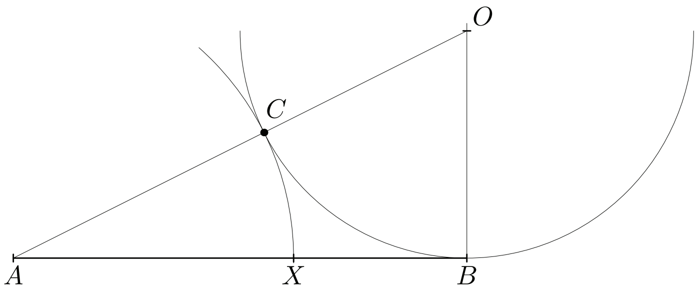
dostaneme tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^{n+1}-b^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a - b\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}} =$$
$$= a = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

neboť $b < a$ a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} = 0.$$

Připomeňme si geometrický způsob rozdělení úsečky AB zlatým řezem. Na kolmici k přímce AB v bodě B sestrojíme bod O tak, že $|OB| = |AB|/2$, a z tohoto bodu opíšeme kružnici s poloměrem $|AB|/2$; její průsečík s úsečkou AO označíme C. Hledaný bod X, který rozděluje úsečku AB zlatým řezem, sestrojíme tak, aby jeho vzdálenost od bodu A byla rovna délce úsečky AC (obr. 1).



Obr. 1

Posloupnost posledních číslic členů Fibonacciho posloupnosti

Utvořme posloupnost posledních číslic členů Fibonacciho posloupnosti:

$$1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, \ldots$$

Je vidět, že jde o posloupnost s prvními členy 1, 2, ve které každý další člen je součtem podle modulu 10 dvou členů předcházejících. Jsme-li trpěliví a vypíšeme-li dostatečný počet členů, zjistíme, že na 59. a 60. místě této posloupnosti jsou čísla 0 a 1. Znamená to, že od 61. místa se členy této posloupnosti periodicky opakují.

Součet jedné nekonečné řady

Ve [2] je odvozen pozoruhodný vztah, který v rozporu s názvem tohoto příspěvku příliš elementární není. Uvádíme ho jen pro zajímavost. Platí

$$\operatorname{arccotg} F_2 + \operatorname{arccotg} F_4 + \operatorname{arccotg} F_6 + \ldots + \operatorname{arccotg} F_{2n} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem.* Prometheus, Praha, 2006.

[2] Calda, E.: Kterak od jedné vlastnosti Fibonacciho posloupnosti ku číslu π dospěti možno jest. *Matematika, fyzika, informatika*, roč. 8 (1999), č. 4.