Rozhledy matematicko-fyzikální

58. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 3, 30–47

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146678`

SOUTĚŽE

58. ročník Fyzikální olympiády, úlohy 1. kola

(Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.)

KATEGORIE A

1. Testování závodních automobilů

a) Při testování brzd automobilu A klesla jeho rychlost na dráze $s = 240$ m z $v_0 = 230\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ na $v = 80{,}0\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Určete velikost zrychlení automobilu a dobu, po kterou brzdil.

b) Automobil B se rozjížděl z klidu, dokud nedosáhl rychlosti v_0. Hmotnost automobilu je $m = 650$ kg a maximální výkon motoru $P_{\mathrm{max}} = 550$ kW. Jak dlouho mu bude trvat rozjíždění a jakou dráhu přitom ujede, bude-li se rozjíždět rovnoměrně zrychleně s maximálním možným zrychlením? Využije přitom plný výkon motoru? Součinitel tření mezi pneumatikami a vozovkou je $f = 0{,}70$. Odpor vzduchu zanedbejte.

c) Automobily vjíždí současně do cílové rovinky; automobil A rychlostí $v_{\mathrm{A}} = 180\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, automobil B rychlostí $v_{\mathrm{B}} = 200\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Rychlost automobilu A se nemění, rychlost automobilu B, který má poruchu motoru, klesá. Závislost jeho rychlosti na čase je v tabulce.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{v_{\mathrm{B}}}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	55,6	35,6	20,0	8,9	2,2	0

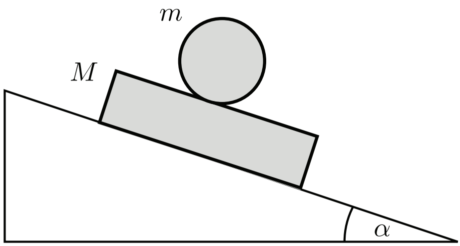
Sestrojte graf závislosti rychlosti automobilu B na čase a s pomocí rovnice regrese určete, kde a kdy předjede automobil A automobil B. Jakou rychlost bude mít automobil B v okamžiku, kdy ho předjíždí automobil A?

2. Nakloněná rovina s deskou a válcem

Na nakloněnou rovinu se sklonem α položíme desku ve tvaru kvádru o hmotnosti M a současně na ni položíme plný homogenní válec o hmotnosti m. Poté obě tělesa uvolníme. Součinitel smykového tření mezi deskou a nakloněnou rovinou je f. Třecí síla mezi deskou a válcem je natolik velká, že válec neprokluzuje.

a) Určete velikost zrychlení a_1 válce vzhledem k nakloněné rovině a velikost zrychlení a_2 desky vzhledem k nakloněné rovině.
b) Určete minimální součinitel $f_{\min}$ smykového tření mezi deskou a válcem, aby nedošlo k prokluzování.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha_1 = 15°$, $\alpha_2 = 40°$, $m = 0{,}60M$, $f = 0{,}30$.



Obr. 1

3. Durový akord

Homogenní kruhová deska o poloměru R a o hmotnosti M je zavěšena ve vodorovné poloze na třech svislých stejně dlouhých strunách. Body zavěšení desky jsou rovnoměrně rozmístěny po jejím obvodu. Na desku máme postavit válec tak, aby struny byly naladěny v durovém akordu, to znamená, že postupný poměr jejich frekvencí je $f_1 : f_2 : f_3 = 4 : 5 : 6$. Frekvence tónu je přímo úměrná odmocnině z velikosti napínající síly, tj. $f = k\sqrt{F}$. Každá struna může být napínána silou o maximální velikosti $1{,}80Mg$.

Určete množinu všech bodů na povrchu desky, nad nimiž se může nacházet těžiště válce, a všechny možné hmotnosti m válce.

4. Pravoúhlý optický hranol

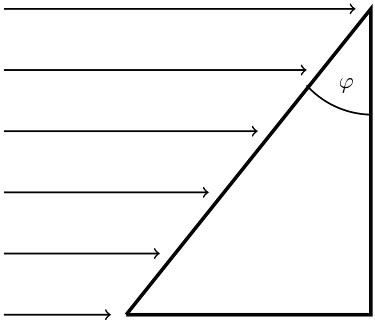
Optický hranol má podstavu tvaru pravoúhlého trojúhelníku, index lomu látkového prostředí hranolu vzhledem k okolnímu vzduchu je $n = 1{,}05$. Na hranol dopadá kolmo k jedné z navzájem kolmých stěn svazek rovnoběžných paprsků (obr. 2).

Při jakém úhlu φ optického hranolu vzájemně svírají paprsky vystupující z hranolu úhel $\omega = 60°$?

Při lomu zanedbejte skutečnost, že se část světla též odráží.

V obecném řešení užijte vztahy

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}.$$



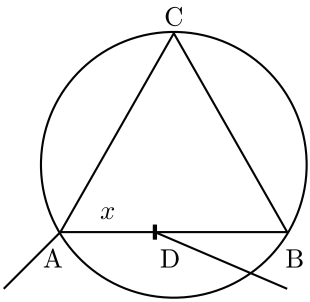
Obr. 2

5. Vodivý kruh

Z pevného drátu všude stejného průřezu byl vytvořen rovnostranný trojúhelník ABC s opsanou kružnicí o poloměru r (obr. 3). Odpor jedné strany trojúhelníka je R.

a) Jaký odpor naměříme mezi body A a B?

b) Mezi body A a B je pohyblivý kontakt D. V jaké vzdálenosti x od bodu A musíme umístit kontakt, aby odpor mezi body A a D byl maximální?

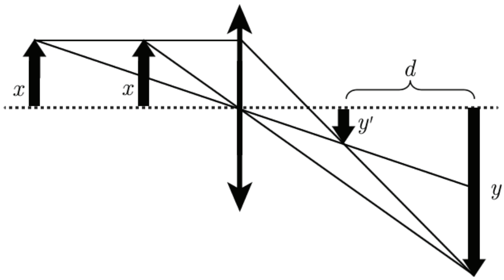


Obr. 3

6. Měření ohniskové vzdálenosti čočky Abbeovou metodou

Úkol: Určete ohniskové vzdálenosti tří různých spojných čoček Abbeovou metodou.

Pomůcky: Milimetrový papír, lampička se stojánkem, držák diapozitivů, diapozitiv s písmenem, 3 různé spojné čočky, matnice, 4 stojánky, pravítko, školní regulátor napětí nebo jiný zdroj, 2 vodiče.



Obr. 4

Teorie: Ohniskovou vzdálenost čočky určíme ze vztahu

$$f = \frac{d}{Z_1 - Z_2} = \frac{dx}{y - y'}, \quad \text{kde } Z_1 = \frac{y}{x},\ Z_2 = \frac{y'}{x}.$$

Odvoďte tento vztah.

Postup práce: Pomocí milimetrového papíru změříme velikost obrázku diapozitivu x a velikost ostrého obrazu y. Předmět pak posuneme o malou vzdálenost od čočky. Najdeme ostrý obraz (stínítko jsme museli posunout o vzdálenost d) a změříme jeho velikost y'. Měříme vždy pětkrát pro různé velikosti obrazů. Výsledek zapište s odchylkou měření a určete i relativní odchylku ze vztahu

$$\delta f = \frac{\Delta f}{\bar{f}} \cdot 100\ \%.$$

Zapište všechny výsledky s odchylkami měření ve tvaru $f = \bar{f} \pm \Delta f$ v milimetrech s relativní odchylkou δf a porovnejte se skutečnými hodnotami.

Čočka	$\frac{y}{\mathrm{mm}}$	$\frac{y'}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	$\frac{f_i}{\mathrm{mm}}$
1. . . 2. . . 3				
1. . . 2. . . 3				
1. . . 2. . . 3				
1. . . 2. . . 3				
1. . . 2. . . 3				

7. Hod míčkem

Z 20. patra výškové budovy byl vržen svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0 hladký míček o hmotnosti m. Během letu na míček působí odporová síla, jejíž velikost je přímo úměrná velikosti okamžité rychlosti míčku. Na zem míček dopadl rychlostí o velikosti v_2.

a) Sestrojte graf závislosti okamžitého výkonu působících sil na rychlosti míčku.

b) Najděte velikost rychlosti míčku v_m v okamžiku, kdy se jeho kinetická energie mění nejrychleji v průběhu celého pohybu. Zvažte všechna možná řešení.

Návod: Časová změna kinetické energie je rovna okamžitému výkonu všech sil, které na míček působí.

KATEGORIE B

1. Dva puky

Hokejový puk se pohybuje po ledě a rychlostí o velikosti v_0 narazí do druhého stejného puku, který je v klidu. Po nárazu se první puk pohybuje rychlostí o velikosti v, která svírá s původním směrem úhel $\alpha = 10°$, druhý puk se pohybuje rychlostí o velikosti u, která svírá s původním směrem úhel $\beta = 70°$. Určete:

a) poměr velikostí rychlostí $\frac{v}{u}$,

b) poměr drah $\frac{s_1}{s_2}$, které puky urazily po srážce za předpokladu, že součinitel tření je na celé ledové ploše stejný,

c) kolik procent energie se při srážce přeměnilo na teplo.

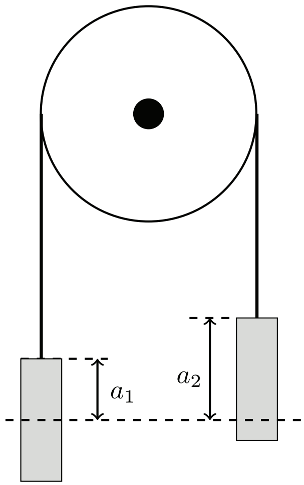
2. Dva válečky na kladce

Přes pevnou kladku zanedbatelné hmotnosti jsou na pevné nevažitelné niti zavěšeny dva válečky stejného průměru $d = 2{,}0$ cm a stejné výšky $h_0 = 10{,}0$ cm. Hustota materiálu prvního válečku je $\varrho_1 = 2\,700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, druhého válečku $\varrho_2 = 2\,300\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Oba válečky jsou částečně ponořeny ve vodě tak, že celý systém je v rovnováze (obr. 1). Horní podstava levého válečku je ve výšce $a_1 = 3{,}0$ cm nad hladinou vody. Hustota vody $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

a) V jaké výšce a_2 nad hladinou vody se nachází horní podstava druhého válečku?

b) Zaveďme souřadnicovou osu x orientovanou svisle vzhůru a s počátkem ve výši horní podstavy levého válečku v rovnovážné poloze soustavy. Vychylme nyní horní podstavu levého válečku o 10 cm níž, tj. do polohy $x_{\min} = -10$ cm (levý váleček je zcela zasunut pod vodu). Nakreslete graf závislosti složky F_x výsledné síly působící na levý váleček při otáčení systémem (ve směru hodinových ručiček) z této krajní polohy do druhé krajní polohy, ve které má horní podstava levého válečku souřadnici $x_{\max} = +10$ cm (pravý váleček se nachází pod hladinou). Odpor vody proti pohybu válečků zanedbejte.

c) Za jakých podmínek bude soustava konat harmonické kmity? Určete periodu těchto kmitů.



Obr. 1

3. Prodloužení zahřátého drátu

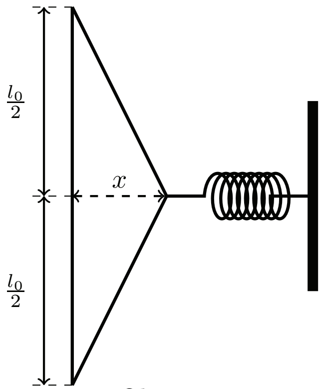
Mezi dvěma body, které jsou od sebe vzdáleny o $l_0 = 30{,}0$ cm, je napjatý tenký měděný drát o odporu $R = 3{,}0\ \Omega$. Uprostřed drátu je kolmo k němu připevněna napjatá pružina. Bude-li drátem procházet po dobu $t = 0{,}50$ s proud $I = 0{,}30$ A, posune se bod, v němž je pružina upevněna, o vzdálenost x (viz obr. 2). Hustota mědi $\varrho_m = 8\,900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, součinitel teplotní roztažnosti mědi $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$, rezistivita mědi $\varrho_e = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}$, měrná tepelná kapacita mědi $c_{\mathrm{Cu}} = 390\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Určete:

a) Změnu teploty drátku při průchodu proudu,

b) posunutí x středu drátku.

c) Dokažte, že pro výpočet x je možné použít přibližný vzorec

$$R \cdot I \cdot \sqrt{t} \sqrt{\frac{\alpha}{2\varrho_m \varrho_e c_{\mathrm{cu}}}}.$$



Obr. 2

Vypočítejte odchylku Δx a relativní odchylku δx při použití přibližného vzorce od skutečné hodnoty. Řešte nejprve obecně, pak po dosazení číselných hodnot. Ztráty tepla do okolí zanedbejte.

4. Dvě kyvadla

Dvě stejná kyvadla tvoří malá kulička zanedbatelného průměru zavěšená na pevné niti zanedbatelné hmotnosti. Obě kyvadla vychýlíme o úhel α z rovnovážné polohy. První kuličku uvolníme, takže bude kmitat jako matematické kyvadlo s periodou kmitů T_{M}. Druhé kuličce udělíme takovou rychlost, aby obíhala po kružnici ve vodorovné rovině, jako tzv. kuželové kyvadlo. Její doba oběhu pak bude T_{K}. Poměr $T_{\mathrm{K}} : T_{\mathrm{M}} = 50 : 51$.

a) O jaký úhel α jsme kyvadla vychýlili?
b) Jaký je poměr velikostí sil napínajících nitě $F_{\mathrm{K}} : F_{\mathrm{M}}$, kde F_{K} je síla napínající nit u kuželového kyvadla a F_{M} je síla napínající nit při průchodu rovnovážnou polohou u matematického kyvadla? V řešení použijte výsledek části a).

Pro dobu kmitu matematického kyvadla platí pro malé výchylky α vztah:

$$T_{\mathrm{M}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right),$$

kde α je úhel v radiánech. Pro $|x| \ll 1$ platí přibližné vztahy

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}.$$

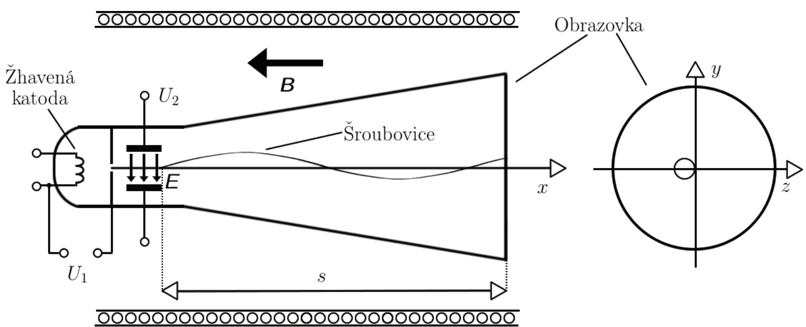
5. Měření specifického náboje elektronu

V r. 1926 použil Busch k určení specifického náboje elektronu Braunovu trubici umístěnou v homogenním magnetickém poli cívky (obr. 3). Elektrony vyletující ze žhavené katody byly urychlovány ve směru osy x napětím U_1. Štěrbinou pak procházely do elektrického pole kondenzátoru, jehož vodorovně položené obdélníkové desky měly jednu stranu o rozměru l rovnoběžnou s osou x, jejich vzdálenost byla d, napětí mezi nimi bylo U_2. Vzdálenost obrazovky od okraje desek byla s. Celá trubice se nacházela v magnetickém poli cívky, jejíž indukci B bylo možno změnou proudu v cívce měnit.

a) Magnetické pole je nejprve vypnuté. Jaké budou souřadnice bodu dopadu elektronu na obrazovku? (Osu y volíme procházející na obrazovce svisle vzhůru, osa z doplňuje osy x, y na pravotočivý systém, viz obr. 3).

b) Po zapnutí magnetického pole se elektron bude pohybovat po šroubovici. Velikost indukce postupně zvětšujeme tak dlouho, dokud se svítící bod na obrazovce neobjeví uprostřed obrazovky v počátku souřadnic. Stane se to při velikosti magnetické indukce B_1. Určete specifický náboj elektronu $\frac{e}{m}$.

c) Jaký je v tomto případě poloměr šroubové trajektorie elektronu?



Obr. 3

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty: $U_1 = 800$ V, $U_2 = 200$ V, $l = 1{,}0$ cm, $d = 0{,}5$ cm, $s = 32{,}0$ cm, $B_1 = 1{,}88$ mT. Vzhledem k malým rozměrům desek kondenzátoru můžeme uvažovat, že šroubovice začíná až poté, kdy elektron opustí kondenzátor. Posunutí elektronového paprsku způsobené elektrickým polem ve směru osy y můžeme zanedbat.

6. Měření elektrochemického ekvivalentu mědi

Teorie: Prochází-li elektrický proud nádobou s roztokem síranu měďnatého (modré skalice) $CuSO_4$ a měděnými elektrodami, anoda se rozpouští a na katodě se naopak vylučuje velmi čistá měď. Podle 1. Faradayova zákona pro elektrolýzu je hmotnost m vyloučené látky přímo úměrná prošlému náboji Q:

$$m = AQ = AIt.$$

Konstanta úměrnosti A je *elektrochemický ekvivalent* vylučované látky, v daném případě dvojmocné mědi.

Provedení úlohy: Použijeme školní soupravu pro pokusy z elektrolýzy (hranatá kádinka, dva držáky elektrod, elektrody). Do kádinky nalejeme roztok 0,5 molu modré skalice v 0,5 litru vody. Měděné elektrody očistíme smirkovým papírem a tu, kterou použijeme jako katodu, pečlivě zvážíme. Sestavíme soupravu tak, aby elektrody byly vzájemně rovnoběžné a ponořené části elektrod měly plošný obsah alespoň 25 cm^2. (Počítáme jen stranu přivrácenou k druhé elektrodě.) Soupravu připojíme k regulovatelnému zdroji stejnosměrného napětí nebo přes vhodný reostat ke zdroji stálého stejnosměrného napětí a po dostatečně dlouhou dobu (alespoň jednu hodinu) udržujeme stálý proud 0,5 A. Po vypnutí proudu vyjmeme katodu, opláchneme ji a osušíme proudem horkého vzduchu (neotíráme). Suchou elektrodu znovu zvážíme.

Úkol: Z hmotnosti mědi vyloučené na katodě a náboje, který prošel elektrolytem určete elektrochemický ekvivalent mědi. Zhodnoťte přesnost měření a odhadněte možnou chybu výsledku. Výsledek porovnejte s tabulkovou hodnotou.

7. Nabíjení kondenzátoru

Kondenzátor o kapacitě C byl nabíjen zdrojem o stálém napětí. Při nabíjení byl ke kondenzátoru sériově zapojen rezistor o odporu $R = 500\ \Omega$. Závislost nabíjecího proudu na čase je zaznamenána v tabulce.

t/ms	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I/mA	20	17,50	15,32	13,41	11,73	10,27	8,99	7,86	6,88	6,02	5,27
t/ms	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
I/mA	4,61	4,04	3,53	3,09	2,71	2,37	2,07	1,81	1,59	1,39	1,22

a) Sestrojte v EXCELu graf závislosti nabíjecího proudu na čase a pomocí rovnice regrese určete kapacitu kondenzátoru.
Nabíjecí proud závisí na čase podle vzorce

$$I = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}.$$

b) Jiný kondenzátor o kapacitě C_1 a rezistor o odporu $R = 500\ \Omega$ byly připojeny sériově ke generátoru střídavého napětí o efektivní hodnotě $U = 10{,}0$ V s proměnnou frekvencí. Závislost procházejícího proudu na frekvenci je uvedena v tabulce.

f/Hz	10,0	15,0	20,0	30,0	50,0
I/mA	8,52	11,54	13,72	16,33	18,41

Sestrojte v EXCELu graf závislosti převrácené hodnoty druhé mocniny efektivní hodnoty proudu $1/I^2$ na druhé mocnině převrácené hodnoty frekvence $1/f^2$, pomocí rovnice regrese vypočítejte kapacitu kondenzátoru C_1.

c) Máme k dispozici žárovku se jmenovitými hodnotami 120 V/100 W a chceme ji připojit na síť s napětím $U_1 = 230$ V. Jaký odpor R musí mít rezistor, který zařadíme sériově se žárovkou, aby žárovka normálně svítila? Jakou kapacitu C_2 by musel mít kondenzátor, který bychom zařadili místo rezistoru o odporu R, aby žárovka normálně svítila? Jakou indukčnost L by musela mít ideální cívka, kterou bychom zařadili místo rezistoru o odporu R, aby žárovka normálně svítila? Frekvence střídavého proudu v síti je $f = 50{,}0$ Hz.

d) Ke stejné žárovce zařadíme sériově kondenzátor o kapacitě C_2 a cívku o indukčnosti L z části c). Obvod připojíme ke generátoru střídavého napětí o efektivní hodnotě $U_1 = 230$ V s proměnnou frekvencí. Při jakých frekvencích bude žárovka normálně svítit?

KATEGORIE C

1. Kolona automobilů

Kolona $N = 20$ vojenských nákladních automobilů stojí na přímé silnici ve stejných rozestupech. Vzdálenost mezi čely automobilů je $l_0 = 10$ m, délka každého automobilu $d = 5{,}0$ m.

Kolona se rozjíždí. Každý automobil se rozjíždí se zrychlením o velikosti $a_0 = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a dosáhne rychlosti o velikosti $v_0 = 57{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, kterou se pak pohybuje rovnoměrně celá kolona. První automobil se začne rozjíždět v čase $t = 0$ s, každý další v okamžiku, kdy se vzdálenost od čela předchozího automobilu zvětší na $l_1 = 35$ m.

a) Sestrojte grafy závislosti $v = v(t)$ rychlosti na čase a $x = x(t)$ polohy na čase pro první tři automobily v koloně za prvních 15 s pohybu prvního automobilu. Nulovou souřadnici polohy volte v místě čela prvního automobilu.
b) Určete vzdálenost mezi automobily kolony při jejím rovnoměrném pohybu.
c) Jaká bude celková délka kolony při jejím rovnoměrném pohybu?
d) Každý automobil může brzdit s maximálním zrychlením o velikosti $a_1 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. O jakou dobu τ musí druhý (a pak každý další) automobil v tomto případě začít brzdit později než automobil první, aby po zastavení byla mezi automobily opět vzdálenost l_0?

2. Družice na oběžné dráze

Družice o hmotnosti $m = 3\,000$ kg se pohybuje po kruhové dráze ve výšce $h = 300$ km nad povrchem Země.

a) Jakou práci bylo třeba vykonat na vynesení družice na oběžnou dráhu?
b) Ukažte, že radiální složka rychlosti družice je v porovnání s její tečnou složkou zanedbatelná, když bylo měřením zjištěno, že po jednoměsíčním pobytu na oběžné dráze se družice přiblížila k Zemi o $\Delta h = 13{,}8$ km.
c) Jaká průměrná odporová síla F působí na družici během jejího letu?

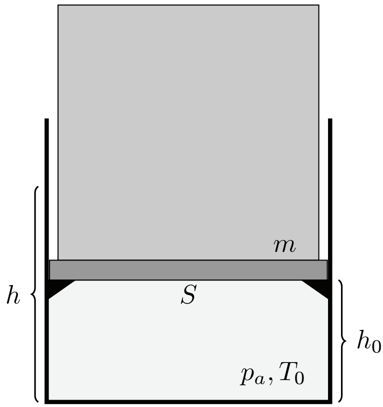
Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty. Poloměr Země $R_\mathrm{Z} = 6\,370$ km, hmotnost Země $M_\mathrm{Z} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, gravitační konstanta $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Gravitační potenciální energie

$$E_\mathrm{p} = -\frac{\varkappa M_\mathrm{Z} m}{r}.$$

3. Práce plynu

V otevřené nádobě tvaru válce je na zarážkách položen píst s ocelovým závažím o celkové hmotnosti m. Počáteční tlak vzduchu uvnitř nádoby je roven atmosférickému tlaku p_a, počáteční teplota je T_0. Počáteční výška pístu nade dnem nádoby je h_0. Nyní začneme plynu dodávat teplo do okamžiku, kdy píst dosáhne výšky h nade dnem nádoby (obr. 1).

a) Určete konečnou teplotu T vzduchu uvnitř nádoby.
b) Určete celkové teplo Q, které vzduch v nádobě přijal.
c) Určete účinnost η zdvíhání pístu se závažím, tj. poměr vykonané mechanické práce a celkového tepla, které vzduch uvnitř válce přijal.



Obr. 1

Vzduch považujte za ideální dvouatomový plyn. Tření zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 25{,}0$ kg, $T_0 = 293$ K, $h_0 =$ $= 0{,}100$ m, $h = 0{,}280$ m, $S = 0{,}015\,0\ \mathrm{m}^2$, $p_\mathrm{a} = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa.

4. Balonek ve vakuu

Gumový balonek má v jistém rozsahu poloměrů vlastnosti shodné s mýdlovou bublinou. Takovýto balonek se nacházel ve vakuu a měl poloměr $R_0 = 5{,}0$ cm. Povrchové napětí blány je $\sigma = 25\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

a) Určete tlak $p_{\mathrm{in},0}$ uvnitř balonku odpovídající poloměru R_0.
b) Najděte vztah pro tlak p_in uvnitř balonku v závislosti na jeho poloměru R, je-li při poloměru R_0 tlak uvnitř $p_{\mathrm{in},0}$.
c) Najděte vztah pro tlak p_in uvnitř balonku v závislosti na tlaku p_out vně balonku a na jeho poloměru R, je-li povrchové napětí σ.

d) Sestrojte ve vhodném měřítku do jednoho grafu závislost tlaku p_{in} na poloměru R nalezenou v úkolu b) a závislosti tlaku p_{in} na poloměru R nalezené v úkolu c) pro $p_{\text{out}} \in \{1{,}0\ \text{kPa}; 2{,}0\ \text{kPa}; 3{,}0\ \text{kPa}\}$.

e) Odečtěte z grafu poloměry balonku pro tyto tři vnější tlaky.

Uvažujte, že všechny procesy probíhají izotermicky a v balonku je ideální plyn.

5. Vaření v přírodě

Turista vaří vodu na plynovém vařiči o stálém tepelném výkonu v kotlíku se svislými stěnami. Po uvedení do varu se za dobu $\tau = 8{,}0$ min snížila hladina vody v kotlíku o $h = 2{,}5$ cm. V tu chvíli začalo pršet. Kapky padají svisle a každá dešťová kapka má teplotu $t_0 = 20\ °\text{C}$, hmotnost $m_0 = 10$ mg a velikost rychlosti $v = 9{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hustota kapek ve vzduchu je $n = 1\,000\ \text{m}^{-3}$.

a) Bude voda vřít i při dešti? Dokažte matematicky.

b) Za jak dlouho bude v kotlíku hladina ve stejné výšce, jako před začátkem varu?

Hustota vody $\varrho = 1000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita vody $c = 4\,200\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrné skupenské teplo vypařování vody při varu $l_{\text{v}} = 2{,}26 \cdot 10^6\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Teplota varu vody $t_{\text{v}} = 100\ °\text{C}$.

6. Měření součinitele smykového tření

Těleso (pravítko) začne po nakloněné rovině klouzat, je-li splněna podmínka

$$f = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

Těleso (pravítko) opřené o stěnu (dřevěné pravítko – obr. 2) začne klouzat v okamžiku, kdy je splněna podmínka

$$f_1 = \frac{l}{2h + fl}, \tag{2}$$

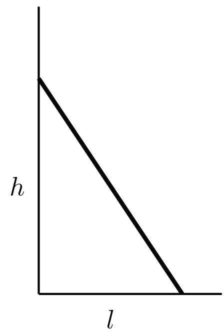
kde h je vzdálenost horního konce tělesa od vodorovné podložky, l je vzdálenost dolního konce tělesa od svislé stěny, f je součinitel smykového tření mezi tělesem a svislou stěnou (dřevěným pravítkem) a f_1 je součinitel smykového tření mezi stolní deskou a pravítkem.

Úkoly:

a) Odvoďte vztahy (1) a (2).

b) Nejprve určete součinitel smykového tření f mezi dřevěným a plastovým pravítkem tak, že na dřevěné pravítko položíte pravítko plastové a zvětšujete úhel sklonu tak dlouho, dokud se horní pravítko nerozjede. Změřením výšky horního konce pravítka nad podložkou a základny (nebo délky) nakloněné roviny pak určíte $\operatorname{tg}\alpha$.

c) Dřevěné pravítko upevněte ve svislé poloze do stojanu a opřete o něj plastové pravítko (obr. 2). Najděte polohu, při které plastové pravítko začne klouzat po desce stolu a zaznamenejte údaje h a l.



Obr. 2

Měření proveďte nejméně pětkrát; do vztahu (2) dosazujte za f průměrnou hodnotu vypočtenou v části b) a určete součinitel smykového tření f_1. Vypočítejte odchylku a relativní odchylku měření f a f_1. Měření opakujte tak, že polohu pravítek vyměníte. Pokud nemáte plastové pravítko, můžete použít pravítko kovové nebo jiný vhodný předmět podobného tvaru (např. kovovou páku ze soupravy pro mechaniku).

7. Potápějící se loď

Uprostřed dna nákladní vlečné lodi o rozměrech $a = 50$ m, $b = 10$ m a výšce $c = 5{,}0$ m se nárazem vytvořil kruhový otvor o průměru $d = 20$ mm. Počáteční výška horního okraje lodi nad úrovní vody je $h = 3{,}5$ m. Loď je prázdná a shora otevřená.

a) Ukažte, že se rozdíl úrovní hladin uvnitř a vně lodi nemění.

b) Určete rychlost proudění vody v otvoru.

c) Vypočítejte, za jak dlouho se loď potopí.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

KATEGORIE D

1. Běžec a trenér

Délka atletického oválu je $d = 400$ m. Atlet a jeho trenér vyrazili ve stejném okamžiku z cílové čáry v navzájem opačných směrech. Trenér šel pěšky a na stopkách zjistil, že se poprvé potkali v čase $t_1 = 79$ s a že atlet poprvé proběhl cílovou čarou v čase $t_2 = 96$ s.

a) Určete dráhu s_1, kterou ujde trenér do okamžiku prvního setkání.
b) Určete čas t_3, v němž trenér projde poprvé cílovou čarou.
c) Určete dráhu s atleta v okamžiku, kdy trenér poprvé projde cílovou čarou.

Oba pohyby považujte za rovnoměrné. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

2. Chlapec na kolotoči

Chlapec o hmotnosti $m = 42$ kg sedí na sedačce kolotoče, který se rovnoměrně otáčí kolem svislé osy. Chlapec je přitlačován k sedačce celkovou silou $\boldsymbol{F}$, která je od svislého směru odchýlena o úhel $\alpha = 40°$. Poloměr otáčení chlapce je $r = 3{,}7$ m.

a) Určete přetížení $k = \frac{F}{F_G}$, tj. poměr velikostí síly F při otáčení a tíhové síly F_G působící na chlapce.
b) Určete periodu T otáčení kolotoče.
c) Určete kinetickou energii E_k chlapce.
d) Kolotoč zastavil za dobu $t_1 = 19$ s rovnoměrně zpomaleným pohybem. Určete opsaný úhel φ během zastavování.

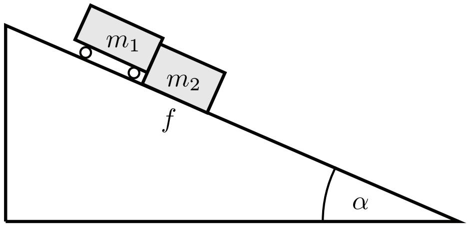
Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Velikost chlapce považujte za zanedbatelnou.

3. Kvádr a vozík

Na nakloněnou rovinu se sklonem $\alpha = 15°$ můžeme umístit vozík o hmotnosti $m_1 = 200$ g a kvádr o hmotnosti $m_2 = 360$ g (obr. 1). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je $f = 0{,}30$.

a) Vypočtěte velikosti potřebných sil a rozhodněte, zda se na nakloněné rovině udrží samotný kvádr a zda se na ní udrží souprava kvádru s vozíkem.
b) Určete maximální velikost úhlu α_2 sklonu nakloněné roviny, při němž se samotný kvádr ještě udrží v klidu, a maximální velikost úhlu α_{12}, při němž se v klidu udrží soustava kvádru s vozíkem.

c) Nastavíme úhel sklonu nakloněné roviny $\beta = 26° \geq \alpha_2$. Určete velikosti rychlostí v_1, v_2, v_{12}, které postupně po nakloněné rovině na dráze $s = 1{,}4$ m získají samotný vozík, samotný kvádr a soustava kvádru s vozíkem.



Obr. 1

Řešte obecně, pak pro dané hodnoty. Odpor vzduchu zanedbejte.

4. Zrychlování automobilu

Okamžitý výkon automobilu lze vyjádřit vztahem $P = Fv$, kde F je velikost okamžité tahové síly a v velikost okamžité rychlosti. Bude-li se automobil rozjíždět z klidu se stálým užitečným výkonem P, pak s rostoucí rychlostí tahová pohybová síla klesá. Na počátku rozjíždění při malé rychlosti může motor automobilu vyvíjet tak velkou sílu, že třecí síla mezi pneumatikami a vozovkou nestačí k plnému záběru kol a kola prokluzují.

Automobil o hmotnosti $m = 1\,400$ kg má na vodorovné silnici dvě shodně zatížené nápravy. Záběrová kola jsou pouze na jedné nápravě. Součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou je $f = 0{,}70$.

a) Určete maximální velikost F_{tah} tahové síly, při níž nedojde k prokluzování záběrových kol.

b) Určete minimální velikost rychlosti v_1, z níž může automobil bez prokluzování záběrových kol zrychlovat s konstantním užitečným výkonem $P = 20$ kW.

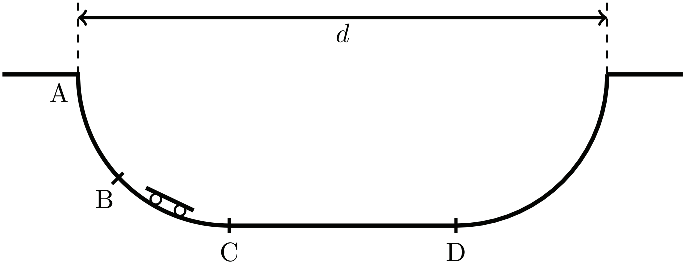
c) Automobil zvětší velikost rychlosti z hodnoty v_1 na hodnotu $v_2 = 80\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ při konstantním užitečném výkonu $P = 20$ kW. Určete velikost zrychlení a_1 při rychlosti v_1 a velikost zrychlení a_2 při rychlosti v_2.

d) Určete dobu Δt, během níž v úloze c) došlo ke změně velikosti rychlosti z v_1 na v_2.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

5. U-rampa

Profil U-rampy tvoří dvě čtvrtkružnice spojené úsečkou. Šířka U-rampy je $d = 12{,}0$ m (obr. 2). Závodník v bodě A uvolnil z klidu skateboard, který pak na vodorovné rovině dosáhl rychlosti $v_1 = 8{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



Obr. 2

a) Určete dobu t pohybu mezi body C a D.
b) Určete velikost okamžité rychlosti v_2 skateboardu v bodě B, který rozděluje čtvrtkružnicovou trajektorii na dvě shodné části.
c) Určete velikost tečného zrychlení a_t a velikost dostředivého zrychlení a_d skateboardu v bodě B.

Valivý odpor a odpor vzduchu zanedbejte, rozměry skateboardu též považujte za zanedbatelné. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

6. Hustota ledu

Těleso s hustotou větší, než je hustota vody, zamrzlé v dostatečném množství ledu, může plovat na hladině vody. Po roztání části ledu se těleso s ledem zcela ponoří, na okamžik se vznáší a následně klesne ke dnu. V úloze využijeme okamžik vznášení k určení hustoty ledu. Označíme-li m_t hmotnost tělesa, ϱ_t hustotu tělesa, ϱ_v hustotu vody, ϱ hustotu ledu a V_v objem vody vzniklé roztáním zbytku ledu po vyjmutí při vznášení, je hustota ledu dána vztahem

$$\varrho = \frac{\varrho_\mathrm{t}\varrho_\mathrm{v}^2 V_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{t}\varrho_\mathrm{v}V_\mathrm{v} + m_\mathrm{t}(\varrho_\mathrm{t} - \varrho_\mathrm{v})} = \frac{\varrho_\mathrm{v}}{1 + \frac{m_\mathrm{t}}{V_\mathrm{v}}\left(\frac{1}{\varrho_\mathrm{v}} - \frac{1}{\varrho_\mathrm{t}}\right)}. \qquad (1)$$

Pomůcky: Plné kovové předměty známé hustoty, plastové nádoby (např. větší kelímek od jogurtu, spodní část PET láhve apod.), technické váhy, odměrný válec, kádinky, kbelík s vodou (teploměr), mraznička.

Úkoly:

a) S využitím Archimédova zákona odvoďte vztah (1).

b) Změřte popsanou metodou hustotu ledu použitím aspoň tří předmětů z různých látek (např. železo, měď, hliník, olovo, ...) a výsledky porovnejte se známou hustotou ledu. Případný rozdíl se pokuste zdůvodnit.

Postup: V plastové nádobě necháme zmrznout zhruba polovinu konečného množství vody, vložíme ochlazené těleso a dolijeme vodou ochlazenou na teplotu 0 °C. V ledu by dle možností neměly zůstat vzduchové bubliny. Po zmrazení veškeré vody led s tělesem vyklepneme z plastové nádoby a vložíme do kbelíku s vlažnou vodou. Plove-li, počkáme, až se začne vznášet a okamžitě jej přeneseme do prázdné kádinky. (Teploměrem se můžeme přesvědčit o teplotě vody v okamžiku vyjmutí ledu a podle tabulek použít správnou hustotu vody.) Led necháme zcela roztát, tání lze urychlit využitím plotýnky. Těleso vyjmeme a pomocí odměrného válce změříme objem vody v kádince.

7. Automobil v koloně

Automobil se v hustém městském provozu pohyboval mezi dvěma světelnými křižovatkami. Na zelenou se začal rozjíždět rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu 5,0 s, přičemž dosáhl rychlosti 12 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Touto rychlostí se pohyboval po dobu 4,0 s a ve stojící koloně před další křižovatkou za dobu 6,0 s zastavil rovnoměrně zpomaleným pohybem.

a) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase.

b) Určete velikosti zrychlení a_1, a_2 a a_3 na jednotlivých úsecích a celkovou dráhu s_c.

c) Sestavte vhodnou tabulku, do níž zapíšete dráhu ujetou v jednotlivých časech po 1,0 s od okamžiku pohybu do okamžiku zastavení. K výpočtům použijte vzorce nebo využijte obsahy ploch pod grafem z úlohy a). Sestrojte na milimetrový papír graf závislosti dráhy na čase.

d) V časech $t_1 = 3{,}3$ s a $t_2 = 12{,}8$ s sestrojte co nejpřesněji ke grafu v úloze c) tečny. U každé určete její směrnici (tj. poměr přírůstku dráhy Δs a přírůstku času Δt), která udává velikost okamžité rychlosti v_1' v čase t_1 a velikost okamžité rychlosti v_2' v čase t_2. Vypočtěte pomocí vzorců pro rovnoměrně zrychlený a pro rovnoměrně zpomalený pohyb velikosti rychlostí v_1 a v_2 v časech t_1 a t_2 a porovnejte je s hodnotami v_1' a v_2' získanými z grafu.