Emil Calda

Počet číslic v dekadickém zápisu čísla 2^{200}

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 3, 28–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146677

PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Počet číslic v dekadickém zápisu čísla 2^{200}

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with the number of digits in the decimal representation of the number 2^{200}.

Znát počet číslic v dekadickém zápisu čísla 2^{200} není jistě příliš důležité, ale způsob, kterým tento počet v následujících řádcích zjistíme, je zajímavý a poučný. Než se však do určení tohoto počtu pustíme, uvedeme dvě téměř samozřejmé věty, které budeme potřebovat; v těchto větách (a v celém dalším textu) je v termínu „dekadický zápis" slovo „dekadický" vynecháváno.

První věta se týká počtu číslic v zápisu přirozeného čísla $a > 10^n$, $n \in \mathbb{N}$. Protože zápis čísla 10^n je tvořen $n + 1$ číslicemi (n nul a jedna jednička), je v zápisu čísla $a > 10^n$ aspoň $n + 1$ číslic.

Druhá věta udává počet číslic v zápisu přirozeného čísla $b < 10^n$, $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě je v zápisu čísla $b < 10^n$ nejvýše n číslic, neboť jich musí být méně než $n + 1$.

Určíme nejprve, jaký je nejmenší možný počet číslic v zápisu čísla 2^{200}. Platí

$$2^{200} = \left(2^{10}\right)^{20} = 1\,024^{20} > 1\,000^{20} = 10^{60}.$$

Tento výsledek podle první z obou uvedených vět znamená, že číslo 2^{200} má ve svém zápisu aspoň 61 číslic.

V dalším kroku určíme, kolik číslic je v zápisu čísla 2^{200} nejvýše. Následujícími úpravami zlomku $\frac{2^{200}}{10^{60}}$ dostaneme

$$\frac{2^{200}}{10^{60}} = \frac{1\,024^{20}}{10^{60}} < \frac{1\,025^{20}}{1\,000^{20}} = \left(\frac{41}{40}\right)^{20}.$$

Místo mocniny $\left(\frac{41}{40}\right)^{20}$, tj. místo součinu dvaceti zlomků $\frac{41}{40}$, budeme uvažovat součin

$$\frac{22}{21} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{24}{23} \cdot \ldots \cdot \frac{39}{38} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{41}{40},$$

který je tvořen rovněž dvaceti zlomky. Dokážeme o nich, že každý s výjimkou posledního je větší než $\frac{41}{40}$.

Ze vztahu

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

který platí pro všechna přirozená čísla n, totiž plyne, že pro všechna tato čísla platí také

$$\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti za n postupně čísla 21, 22, 23, …, 38, 39, 40, dostaneme

$$\frac{22}{21} > \frac{23}{22} > \frac{24}{23} > \ldots > \frac{39}{38} > \frac{40}{39} > \frac{41}{40}.$$

Znamená to, že platí

$$\frac{22}{21} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{24}{23} \cdot \ldots \cdot \frac{39}{38} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{41}{40} > \left(\frac{41}{40}\right)^{20}.$$

Vzhledem k tomu, že součin na levé straně této nerovnosti je roven číslu $\frac{41}{21}$, které je menší než 10, docházíme k nerovnostem

$$10 > \frac{41}{21} > \left(\frac{41}{40}\right)^{20} > \frac{2^{200}}{10^{60}},$$

z nichž plyne

$$10 \cdot 10^{60} = 10^{61} > 2^{200}.$$

Podle druhé z obou výše uvedených vět to znamená, že v zápisu čísla 2^{200} je méně než 62 číslic. A protože jsme už ukázali, že číslic v zápisu tohoto čísla je aspoň 61, dospíváme k výsledku:

Dekadický zápis čísla 2^{200} *obsahuje* 61 *číslic.*

Podobným způsobem se můžete přesvědčit o tom, že číslo 2^{100} má ve svém dekadickém zápisu 31 číslic.

Literatura

[1]] Krečmar, V. A.: *Zadačnik po algebre.* Nauka, Moskva, 1968.