Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 2, 56–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146671

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. září 2016* na adresu redakce.

Úloha 55. Je dán libovolný konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na jeho hranici najděte bod X tak, aby úsečka AX rozdělila pětiúhelník na dvě části se stejným obsahem.

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 56. *Skákající žába*

Obdélníková deska o hmotnosti M plove v klidné vodě. Na desce sedí žába, jejíž hmotnost označíme m. Žába vyskočí a dopadne na desku ve vzdálenosti L. Tření mezi deskou a vodou je velmi malé, ke změně ponoru desky při skoku žáby nepřihlížíme, odpor vzduchu neuvažujeme.

a) Určete velikost rychlosti $\boldsymbol{v}$ žáby při výskoku, jestliže žába vyskočí pod úhlem α.

b) Při jakém úhlu výskoku má rychlost $\boldsymbol{v}$ nejmenší velikost $v_{\min}$? Stanovte $v_{\min}$.

c) K jaké hodnotě se blíží $v_{\min}$ pro $\frac{m}{M} \to 0$?

Řešte nejprve obecně, pak úlohy b) a c) pro $L = 0{,}60$ m, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$,

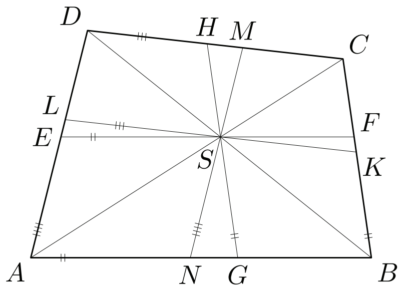
1) $\frac{M}{m} = 5$,

2) $\frac{M}{m} = 100$.

(*Ivo Volf*)

Řešení úloh z čísla 3/2015

Úloha 49. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s nerovnoběžnými protějšími stranami, jehož průsečík úhlopříček je S. Bodem S jsou vedeny rovnoběžky: $EF \parallel AB$, $GH \parallel BC$, $KL \parallel CD$, $MN \parallel DA$ podle obrázku.



Body N, G leží na straně AB, body K, F na straně BC, body M, H na straně CD a body L, E na straně DA. Dokažte, že

$$\frac{|NG|}{|AB|} = \frac{|KF|}{|BC|} = \frac{|HM|}{|CD|} = \frac{|LE|}{|DA|},$$

právě když platí některá z rovností $|AS| = |CS|$, $|BS| = |DS|$.

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Díky podobnosti mnoha trojúhelníků na daném obrázku můžeme psát rovnosti:

$$\frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|AG|}{|AB|} = \frac{|LS|}{|DC|} = \frac{|DM|}{|DC|} = \frac{|AL|}{|AD|} = \frac{|GS|}{|BC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$$

$$\frac{|BS|}{|BD|} = \frac{|BN|}{|AB|} = \frac{|KS|}{|DC|} = \frac{|CH|}{|DC|} = \frac{|NS|}{|AD|} = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BK|}{|BC|}$$

$$\frac{|CS|}{|CA|} = \frac{|FS|}{|AB|} = \frac{|BG|}{|AB|} = \frac{|CM|}{|DC|} = \frac{|MS|}{|AD|} = \frac{|DL|}{|AD|} = \frac{|CF|}{|BC|}$$

$$\frac{|DS|}{|DB|} = \frac{|ES|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|DH|}{|DC|} = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|HS|}{|CB|} = \frac{|CK|}{|CB|}$$

S pomocí těchto rovností můžeme vytvořit tyto rovnosti:

$$\frac{|NG|}{|AB|} = \frac{|AB| - |AN| - |BG|}{|AB|} = 1 - \frac{|AN|}{|AB|} - \frac{|BG|}{|AB|} = 1 - \frac{|DS|}{|BD|} - \frac{|CS|}{|AC|}$$

$$\frac{|KF|}{|BC|} = \frac{|BC| - |BK| - |CF|}{|BC|} = 1 - \frac{|BK|}{|BC|} - \frac{|CF|}{|BC|} = 1 - \frac{|BS|}{|BD|} - \frac{|CS|}{|AC|}$$

$$\frac{|HM|}{|CD|} = \frac{|CD| - |CM| - |DH|}{|CD|} = 1 - \frac{|CM|}{|CD|} - \frac{|CF|}{|CD|} = 1 - \frac{|CS|}{|CA|} - \frac{|DS|}{|BD|}$$

$$\frac{|LE|}{|AD|} = \frac{|AD| - |DL| - |AE|}{|AD|} = 1 - \frac{|DL|}{|AD|} - \frac{|AE|}{|AD|} = 1 - \frac{|CS|}{|CA|} - \frac{|BS|}{|BD|}$$

Odsud je evidentně vidět ekvivalence:

$$\frac{|NG|}{|AB|} = \frac{|KF|}{|BC|} = \frac{|HM|}{|CD|} = \frac{|LE|}{|DA|},$$

právě když $|BS| = |DS|$.

Při jiném tvaru čtyřúhelníku $ABCD$ může být jiné uspořádání bodů G, N na straně AB, bodů F, K na straně BC, bodů H, M na straně CD, resp. bodů E, L na straně DA. Stejným výpočtem jako výše dospějeme k ekvivalenci:

$$\frac{|NG|}{|AB|} = \frac{|KF|}{|BC|} = \frac{|HM|}{|CD|} = \frac{|LE|}{|DA|},$$

právě když $|AS| = |CS|$.

Spojením úvah z obou předchozích odstavců získáme důkaz dané úlohy.

Úloha 50. *Lyžař*

Lyžař sjel po svahu délky l_1 se sklonem α na vodorovný terén a dojel do vzdálenosti l_2 od konce svahu. Součinitel f smykového tření mezi sněhem a kluznou plochou lyží měl během celého pohybu stálou velikost.

a) Určete hodnotu f.

b) Určete velikost rychlosti lyžaře na konci svahu. Odpor vzduchu zanedbejte. Na úpatí svahu se rychlost mění plynule.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $l_1 = 50$ m, $l_2 = 100$ m, $\alpha = 30°$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(Přemysl Šedivý)

Autorské řešení:

a) Při rozjezdu má lyžař, jehož hmotnost označíme m, nad vodorovným terénem výšku $h_1 = l_1 \sin\alpha$ a tíhovou potenciální energii $E_\mathrm{p} = mgh = mgl_1 \sin\alpha$. Na svahu působí třecí síla $F_{\mathrm{t}_1} = fmg\cos\alpha$, která na úseku délky l_1 vykoná práci $W_1 = fmgl_1 \cos\alpha$. Na vodorovném úseku působí třecí síla $F_{\mathrm{t}_2} = fmg$ a vykoná na tomto úseku práci $W_2 = fmgl_2$. Z rovnosti $E_\mathrm{p} = W_1 + W_2$ dostaneme

$$f = \frac{l_1 \sin\alpha}{l_1 \cos\alpha + l_2} \doteq 0{,}174.$$

b) Na konci svahu má lyžař kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, která je rovna práci W_2 třecí síly na vodorovném úseku. Z rovnosti $E_\mathrm{k} = W_2$ najdeme, s přihlédnutím k výsledkům úlohy a), že

$$v = \sqrt{\frac{2gl_1l_2 \sin\alpha}{l_1 \cos\alpha + l_2}} \doteq 19\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Stav soutěže po 50 soutěžních úlohách

Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 bodů
Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 bodů
Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 bodů
Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 bodů
Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G, tř. Kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů

David Bainak (G, tř. Kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 6 bodů

Tabulka řešitelů Naší soutěže obsahuje ještě dalších 20 řešitelů s nižším počtem bodů, jejich jména uveřejníme příště.

* * * * *

(Dokončení recenze ze str. 61)
Jak uvádí autorka, inspirací k sepsání této životopisné práce bylo objevení vzájemné osobní i odborné korespondence Henryho Lowiga a akademika Vladimíra Kořínka (1899–1981) a studium rodinného archivu, které ji umožnila vědcova manželka Libuše a dcera Ingrid (žijící dnes v australském Sydney). Z těchto zdrojů mimo jiné vyplývá, že se Lowig „styděl“ za svůj německý původ a za vše, co za druhé světové války Němci udělali; proto si nechal úředně změnit jméno, aby nebyl s německou komunitou více spojován, již nikdy nepromluvil německy, v jeho rodině se hovořilo česky, udržovaly se české zvyky. Na Čechy, českou zemi a její kulturu nikdy nedal dopustit, po celý život udržoval písemný kontakt se svými českými přáteli a kolegy; jeho dopisy napsané perfektní češtinou ukazují jeho hluboký zájem o rozvoj naší matematiky.

Monografie se jednak snaží připomenout Lowigovu životní dráhu, ukázat jeho osobní, morální, etické i profesní postoje, jednak zhodnotit jeho matematickou práci. V první části jsou podrobně popsány osudy Henryho Lowiga, jeho otce, matky, sestry a jeho vlastní rodiny, včetně historických souvislostí, a jeho pedagogická a vědecká práce, u nás již zcela neznámá. Hodnotí jeho odborné studie a výsledky dosažené v algebře (teorie svazů), lineární algebře a funkcionální analýze (teorie dimenzí) a matematické analýze (diferenční a diferenciální rovnice) a pokouší se je zařadit do kontextu evropského i světového vývoje matematiky (na této části se spolupodíleli V. Dlab, J. Bečvář a A. Slavík z KDM MFF UK). Tyto partie byly napsány na základě bádání v archivech a knihovnách a na základě podrobné analýzy knižní a časopisecké literatury, odborných monografií a učebnic, novinových článků a zpráv. Ve druhé části jsou uvedeny faktografické přílohy. Jedná se o seznam Lowigových časopiseckých prací doplněný odkazy na jejich recenze, seznam Lowigových recenzí a Lowigovu neobyčejně hlubokou osobní vzpomínku na nelehké období od 13. října 1944 do 5. května 1945, prožité v německých pracovních táborech. Třetí část tvoří obrazová příloha obsahující reprodukce některých dobových dokumentů a fotografií.

Bohumil Tesařík