Emil Calda

Podobné trojúhelníky v podobných úlohách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 1, 24–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146652

PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Podobné trojúhelníky v podobných úlohách

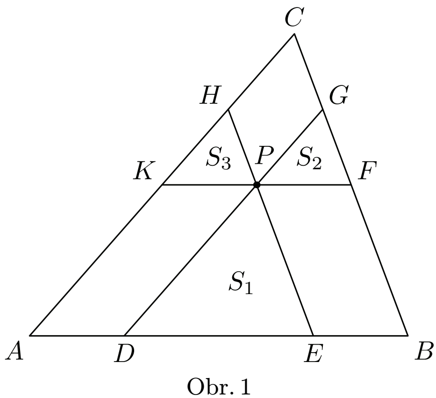
Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. Three examples concerning the area of similar triangles are solved in this article.

V článku budeme potřebovat větu o vzájemném vztahu obsahů podobných trojúhelníků. Než ji uvedeme, připomeneme si, že trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$, jestliže existuje kladné číslo k tak, že platí $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$; číslo k se nazývá koeficient podobnosti. Je jistě známo také to, že v podobných trojúhelnících platí stejné rovnosti i pro jejich výšky: $v'_a = kv_a$, $v'_b = kv_b$, $v'_c = kv_c$. Pomocí těchto vlastností snadno zjistíme, že pro obsah S' trojúhelníku $A'B'C'$, který je podobný trojúhelníku ABC s obsahem S, platí

$$S' = \frac{a' \cdot v'_a}{2} = \frac{ka \cdot kv_a}{2} = k^2 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = k^2 S.$$

Na základě tohoto výsledku vyřešíme následující úlohu: *Bodem P uvnitř trojúhelníku ABC na obr. 1 jsou rovnoběžně s jeho stranami vedeny přímky, kterými je rozdělen na šest disjunktních částí, z nichž tři jsou trojúhelníky. Určete obsah S trojúhelníku ABC, jsou-li známy obsahy těchto trojúhelníkových částí.*



Obr. 1

Všimněme si nejprve, že každý z těchto menších trojúhelníků je podle věty *uu* podobný trojúhelníku ABC. Označíme-li obsahy trojúhelníků PDE, PFG, PHK po řadě S_1, S_2, S_3 a jejich koeficienty podobnosti s trojúhelníkem ABC po řadě k_1, k_2, k_3, tak platí $S_1 = k_1^2 S$, $S_2 = k_2^2 S$, $S_3 = k_3^2 S$, kde

$$k_1 = \frac{|DE|}{|AB|}, \quad k_2 = \frac{|PF|}{|AB|} = \frac{|EB|}{|AB|}, \quad k_3 = \frac{|PK|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|}.$$

Odtud vyjádříme

$$k_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \quad k_3 = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

a protože

$$k_1 + k_2 + k_3 = \frac{|DE| + |EB| + |AD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AB|} = 1,$$

je také

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1,$$

neboli $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. Obsah S trojúhelníku ABC je tak určen, platí pro něj

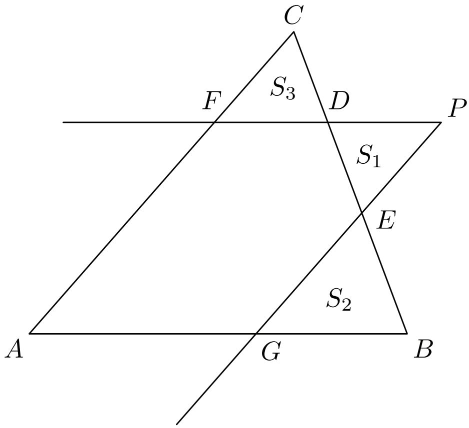
$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$

Ve druhé úloze umístíme bod P vně trojúhelníku ABC tak, aby rovnoběžky PF, PG s přímkami AB, AC oddělovaly od trojúhelníku ABC podle obr. 2 trojúhelník FDC, jehož obsah označíme S_3, a trojúhelník GBE s obsahem S_2; obsah trojúhelníku PDE označíme S_1. Máme opět vyjádřit obsah S trojúhelníku ABC pomocí S_1, S_2 a S_3. Protože každý z těchto tří trojúhelníků je podobný trojúhelníku ABC, platí podobně jako v předcházející úloze

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{|DE| + |EB| + |CD|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|CB|} = 1,$$

odkud plyne

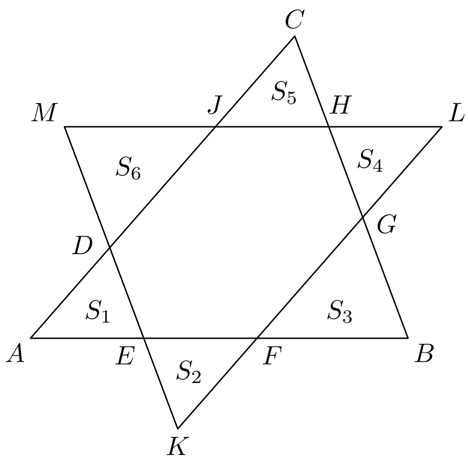
$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$



Obr. 2

Závěrem vyřešíme úlohu o málo obtížnější: *Úloha se týká trojúhelníků ABC a KLM sestrojených na obr. 3 tak, že strany AB a ML, BC a KM, AC a KL jsou rovnoběžné. Máme dokázat, že pro obsahy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 trojúhelníků DAE, EKF, FBG, GLH, HCJ, JMD a obsahy S_{ABC} a S_{KLM} trojúhelníků ABC a KLM platí*

$$\sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_{KLM}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6}.$$



Obr. 3

Při důkazu vyjdeme z toho, že každé dva z osmi daných trojúhelníků jsou podle věty *uu* podobné. Je tedy

$$\frac{\sqrt{S_{KLM}}}{\sqrt{S_1}} = \frac{|MK|}{|DE|} = \frac{|MD| + |DE| + |EK|}{|DE|} = \frac{\sqrt{S_6}}{\sqrt{S_1}} + \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}},$$

odkud dostáváme

$$\sqrt{S_{KLM}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_6}.$$

Podobně dostaneme

$$\frac{\sqrt{S_{ABC}}}{\sqrt{S_4}} = \frac{|BC|}{|GH|} = \frac{|CH| + |HG| + |GB|}{|HG|} = \frac{\sqrt{S_5}}{\sqrt{S_4}} + \frac{\sqrt{S_4}}{\sqrt{S_4}} + \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_4}},$$

z čehož plyne

$$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5}.$$

Tím je dokázáno, že vskutku platí

$$\sqrt{S_{ABC}} + \sqrt{S_{KLM}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6}.$$

Všimněte si, že tato rovnost se dá odvodit jednodušším způsobem, použijeme-li výsledku, který jsme odvodili ve druhé úloze.

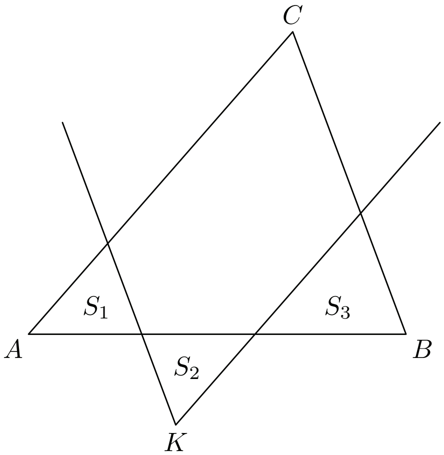
Vedeme-li bodem K na obr. 3a rovnoběžky se stranami AC a BC trojúhelníku ABC, podle této úlohy pro jeho obsah S_{ABC} platí

$$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

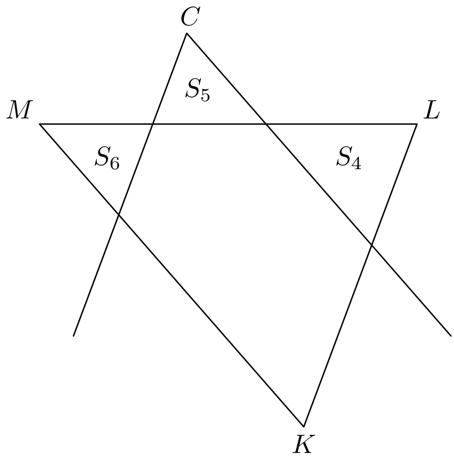
Vedeme-li bodem C na obr. 3b rovnoběžky se stranami MK a LK trojúhelníku KLM, pro jeho obsah S_{KLM} podle druhé úlohy platí

$$\sqrt{S_{KLM}} = \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6}.$$

Po sečtení posledních dvou rovností je požadovaný důkaz proveden.



Obr. 3a



Obr. 3b

L i t e r a t u r a

[1] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie*. Druhé rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.

[2] Calda, E.: *Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU. 1. díl*. Prometheus, Praha, 2002.

[3] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. Prometheus, Praha, 1993.