Martin Malý

Jak sestrojit výčet všech $k$-prvkových podmnožin $n$-prvkové množiny

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 90 (2015), No. 4, 7–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146637`

# Jak sestrojit výčet všech $k$-prvkových podmnožin $n$-prvkové množiny

*Martin Malý, Brno*

**Abstract.** This paper outlines two ways to construct a list of all $k$-element subsets of an $n$-element set, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

**Příklad.**

Sestrojte výčet všech 3-prvkových podmnožin množiny M, všech celých čísel od 1 do 5.

**Řešení 1**

Možný konstrukční postup ilustruje tab. 1. Dříve, než si jej vysvětlíme, zformulujme a dokažme větu, na které je založen.

**Věta 1**

*Označme* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, *libovolná čísla,* A *libovolnou* $n$*-prvkovou množinu,* $t \in \mathrm{A}$ *libovolný prvek a* $f(\mathrm{A}, k)$ *množinu všech* $k$*-prvkových podmnožin množiny* A*. Pak*

$$|\{\mathrm{X} \in f(\mathrm{A}, k); t \in \mathrm{X}\}| = \binom{n-1}{k-1}.$$

*Slovy: Pro každá dvě čísla* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, *každou* $n$*-prvkovou množinu* A *a každý prvek* $t \in \mathrm{A}$ *je počet všech* $k$*-prvkových množin* $\mathrm{X} \subset \mathrm{A}$ *takových, že* $t \in \mathrm{X}$*, roven číslu* $\binom{n-1}{k-1}$.

*Důkaz:* Chceme-li sestrojit všechny prvky množiny $\{\mathrm{X} \in f(\mathrm{A}, k); t \in \mathrm{X}\}$, zřejmě můžeme postupovat tak, že utvoříme množinu $\{t\}'_{\mathrm{A}}$, z ní vybereme všechny její $(k-1)$-prvkové podmnožiny, a pro každou z těchto $\binom{n-1}{k-1}$ podmnožin utvoříme její sjednocení s množinou $\{t\}$. To ale znamená, že množina $\{\mathrm{X} \in f(\mathrm{A}, k); t \in \mathrm{X}\}$ má právě $\binom{n-1}{k-1}$ prvků, neboli

$$|\{\mathrm{X} \in f(\mathrm{A}, k); t \in \mathrm{X}\}| = \binom{n-1}{k-1}.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 4 5 | **1** 2 3 4 5 | **1 2** 3 4 5 | **1 2 3** 4 5 |
| 1 2 3 4 5 | **1** 2 3 4 5 | **1 2** 3 4 5 | **1 2** 3 **4** 5 |
| 1 2 3 4 5 | **1** 2 3 4 5 | **1 2** 3 4 5 | **1 2** 3 4 **5** |
| 1 2 3 4 5 | **1** 2 3 4 5 | **1** 2 **3** 4 5 | **1** 2 **3 4** 5 |
| 1 2 3 4 5 | **1** 2 3 4 5 | **1** 2 **3** 4 5 | **1** 2 **3** 4 **5** |
| 1 2 3 4 5 | **1** 2 3 4 5 | **1** 2 3 **4** 5 | **1** 2 3 **4 5** |
| 1 2 3 4 5 | 1 **2** 3 4 5 | 1 **2 3** 4 5 | 1 **2 3 4** 5 |
| 1 2 3 4 5 | 1 **2** 3 4 5 | 1 **2 3** 4 5 | 1 **2 3** 4 **5** |
| 1 2 3 4 5 | 1 **2** 3 4 5 | 1 **2** 3 **4** 5 | 1 **2** 3 **4 5** |
| 1 2 3 4 5 | 1 2 **3** 4 5 | 1 2 **3 4** 5 | 1 2 **3 4 5** |

Tab. 1: Postup sestrojení výčtu všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, \ldots, 5\}$

V tomto okamžiku jsme připraveni popsat konstrukční postup ilustrovaný tab. 1. V něm lze rozlišit čtyři kroky reprezentované jednotlivými sloupci této tabulky (1. až 4. krok po řadě 1. až 4. sloupcem).

Prvním krokem je sestrojení tabulky o pěti sloupcích, zleva doprava prvním, druhém, ..., pátém, a $\binom{5}{3}$ řádcích, shora dolů prvním, druhém, ..., $\binom{5}{3}$-tém, kde pro každé $(i, j) \in \{1, \ldots, \binom{5}{3}\} \times \{1, \ldots, 5\}$ je symbol v $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci číslicí ve významu $j$-tého přirozeného čísla. Nazvěme tuto tabulku $(5, 3)$-matricí nad posloupností $(1, 2, 3, 4, 5)$ a označme $\mu(5, 3, 1, 2, 3, 4, 5)$. V následujících třech krocích do ní zapíšeme příslušné 3členné kombinace.

První krok zápisu (tj. druhý krok konstrukce požadovaného výčtu) kopíruje následující konstrukci množiny všech tříprvkových podmnožin množiny M: Nejprve utvoříme všechny trojice $\mathrm{X} \subset \mathrm{M}$, $1 \in \mathrm{X}$. Po tom, co tak učiníme, již číslo 1 dále nepotřebujeme, můžeme však ještě utvořit všechny trojice $\mathrm{Y} \subset \mathrm{M} \setminus \{1\}$, $2 \in \mathrm{Y}$. Po provedení tohoto kroku již nepotřebujeme ani číslo 2. Můžeme však ještě utvořit trojici $\{3, 4, 5\}$. Další trojice již zřejmě tvořit nemůžeme. První krok zápisu provedeme tak, že v $(5, 3)$-matrici nad posloupností $(1, 2, 3, 4, 5)$ vyznačíme šestkrát číslo 1, třikrát číslo 2 a jedenkrát číslo 3 – tak, jak vidíme ve 2. sloupci tab. 1. Kolikrát máme to které číslo vyznačit, vypočteme užitím věty 1.

**Příklad.**

U čísla 1 si uvědomíme, že hledáme počet všech tříprvkových podmnožin X pětiprvkové množiny $\{1, \ldots, 5\}$ takových, že $1 \in \mathrm{X}$, a vypočteme $\binom{5-1}{3-1}$.

Rámečky ve 2. sloupci tab. 1 ohraničují matrice, do kterých v následujících dvou krocích konstrukce požadovaného výčtu zapisujeme dvouprvkové kombinace. První krok zápisu těchto kombinací do libovolné z těchto matric (tj. třetí krok konstrukce požadovaného výčtu) kopíruje konstrukci množiny všech dvouprvkových podmnožin množiny všech čísel zapsaných v řádku dané matrice zcela analogickou výše popsané konstrukci množiny všech 3-prvkových podmnožin množiny M. První krok zápisu provedeme tak, že na základě příslušných výpočtů vyznačíme v matrici $\mu(5,3,1,2,3,4,5)$ upravené v předchozím kroku vyznačením čísel 1, 2, 3 čísla 2, 3, 4 do matric $\mu(4,2,2,3,4,5)$, $\mu(3,2,3,4,5)$, $\mu(2,2,4,5)$ tak, jak vidíme ve 3. sloupci tab. 1. Další rámečky zakreslené v tomto sloupci ohraničují matrice, ve kterých v posledním kroku konstrukce požadovaného výčtu vyznačujeme jednotlivá čísla tak, jak ukazuje 4. sloupec tab. 1, který představuje řešení naší úlohy.

*Poznámka.* V článku [1] jsme 4krát uvedli výčet všech $k$-prvkových podmnožin pětiprvkové množiny utvořený podle $k$ od 0 do 5. Nyní je snad jasné, že kdybychom všechny čtyři tabulky okopírovali na průsvitku a překryli přes sebe tak, aby matrice tvořící jednotlivé sloupce splynuly, rámečky v jednotlivých tabulkách zakreslené by se do sebe „poskládaly“ stejně jako v tab. 1.

**Řešení 2**

Jiný konstrukční postup je zřejmý z následujícího zdrojového kódu, napsaného v jazyce Pascal (pro $n = 5$ vypíše program tímto kódem vyjádřený příslušné kombinace ve stejném pořadí, v jakém je najdeme ve 4. sloupci tab. 1, čteme-li jej shora dolů).

```
program VycetKombinaci3_n;
var
  n,i,j,k: integer;
  konec: string;
begin
  repeat
    writeln('Zvol přirozené číslo n>2 a zmáčkni Enter:');
    readln(n);
    writeln;
    if n=3 then
      begin
        writeln(1,' ',2,' ',3);
      end;
```

```
    if n>3 then
      begin
        i:=1;
        j:=2;
        k:=3;
        writeln(i,' ',j,' ',k);
        repeat
          repeat
            repeat
              k:=k+1;
              writeln(i,' ',j,' ',k);
            until k=n;
            j:=j+1;
            k:=j+1;
            writeln(i,' ',j,' ',k);
          until k=n;
          i:=i+1;
          j:=i+1;
          k:=j+1;
          writeln(i,' ',j,' ',k);
        until k=n;
      end;
    writeln('Chceš-li pokračovat, zmáčkni Enter,
    v opačném případě napiš "konec" a zmáčkni Enter.');
    readln(konec);
  until konec='konec'; end.
```

**Cvičení**

1. Na základě zdrojového kódu programu `VycetKombinaci3_n` (uvedeného v tomto článku) napište program:
   a) `VycetKombinaci2_n`
   b) `VycetKombinaci1_n`
2 Na základě zdrojových kódů všech tří programů napište program `VycetKombinaci`, který pro uživatelem „rozumně“ zvolená čísla $k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, vypíše všechny $k$-prvkové kombinace z $n$ prvků.

Literatura

[1] Malý, M.: O vyjádřitelnosti kombinačních čísel. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **88** (2013), č. 3, s. 2–8.