

# Rozhledy matematicko-fyzikální

---

Martin Štefaňák; Igor Jex  
Kvantové procházky

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 90 (2015), No. 1-2, 22–30

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/146614>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2015

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Literatura

- [1] Kleber, M., Vakil, R., Shallit, J.: What this country needs is an 18¢ piece. *Mathematical Intelligencer* **25**, 2 (2003), 20–23.
- [2] Optimální mince a bankovky. (webová stránka se zadáním SOČ práce) [www.kmlinux.fjfi.cvut.cz/balkolub/SOCbankovky](http://www.kmlinux.fjfi.cvut.cz/balkolub/SOCbankovky).
- [3] Šimsa, Š.: Měnová reforma s využitím počítače. *Studentský matematicko-fyzikální časopis M&M*, roč. 16, č. 4 (2009).

## Kvantové procházky

*Martin Štefaňák, Igor Jex, FJFI ČVUT, Praha*

**Abstract.** First, we will present a mathematical model of a simple stochastic process – a random walk on a line. Then, we will show in which aspects is the situation different if the walking particle obeys the quantum mechanics laws. Finally, we will discuss what the quantum walks can be used for.

### Klasická náhodná procházka

Náhodná procházka je matematický model popisující trajektorii sestávající z náhodných kroků. Nachází uplatnění v různých vědních oborech, např. ve fyzice jako model difuze, v biologii pro studium šíření nákazy v přírodním prostředí, v ekonomii pro popis pohybu cen akcií na burze nebo v informatice jako součást některých algoritmů souvisejících s prohledáváním a analýzou velkého objemu dat.

Nejjednodušší model klasické náhodné procházky je náhodná procházka na přímce. Představme si opilého námořníka, který se pokouší dostat z hospody (pozice  $m = 0$ ) domů. Zapomněl ale, jestli má jít doprava nebo doleva. Rozhodne se tedy, že si hodí minci a podle hodnoty hodu, označme je třeba  $L$  a  $R$ , udělá krok doleva nebo doprava. Předpokládejme, že mince je vyvážená, tj. hodnota  $L$  i  $R$  padne se stejnou pravděpodobností  $\frac{1}{2}$ . Poloha námořníka po  $n$  krocích je tedy náhodná veličina. Pravděpodobnost, že ho najdeme na pozici  $m$ , je určena počtem trajektorií, které v  $m$  končí. Aby se dostal do pozice  $m$ , musí celkem udělat  $\frac{n+m}{2}$  kroků doprava a  $\frac{n-m}{2}$  kroků doleva. Snadno zjistíme, že počet všech takových trajektorií je dán kombinačním číslem  $\binom{n}{\frac{n+m}{2}}$ . Pravdě-

podobnost, že některou z nich opilý námořník skutečně půjde, je  $\frac{1}{2^n}$ . Celkem pro pravděpodobnost nalezení opilého námořníka na pozici  $m$  po  $n$  krocích dostaneme výraz

$$P(m, n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+m}{2}}, \quad (1)$$

což je binomické rozdělení. Důležité charakteristiky pravděpodobnostního rozdělení jsou střední hodnota  $\langle m \rangle$  a střední kvadratická odchylka  $\sigma$ , které jsou definovány vztahy

$$\langle m \rangle = \sum_{m=-n}^n mP(m, n),$$

$$\sigma = \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2}.$$

Střední hodnota udává průměrnou pozici opilého námořníka, střední kvadratická odchylka pak určuje „šířku“ rozdělení – velikost okolí střední hodnoty, kde námořníka s velkou pravděpodobností najdeme. V našem příkladě s vyváženou mincí platí, že rozdělení (1) je symetrické. Z toho už snadno plyne, že střední hodnota pozice námořníka je rovna nule nezávisle na počtu kroků. Střední kvadratická odchylka je pak dána výrazem

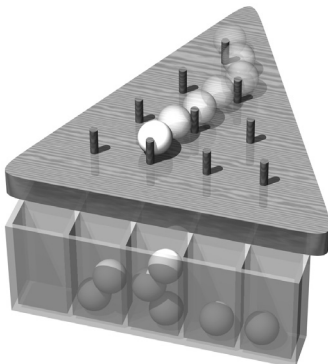
$$\sigma = \sqrt{\sum_{m=-n}^n m^2 \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+m}{2}}}.$$

S použitím binomické věty můžeme sumu sečíst a dostaneme výsledek

$$\sigma = \sqrt{n}.$$

Střední kvadratická odchylka pozice opilého námořníka tedy roste s odmocninou z počtu kroků. Takové chování je typické pro difuzi.

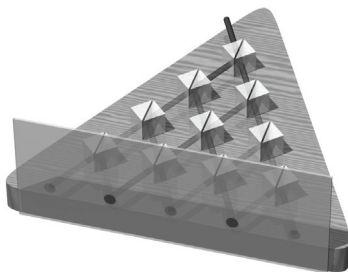
Jednoduchou realizaci náhodné procházky na přímce představuje Galtonova deska na obr. 1. Jedná se o desku s pravidelně zatlučenými hřebíky. Když na hřeb spadne kulička, tak s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$  spadne doleva nebo doprava na další vrstvu hřebů. Každá vrstva odpovídá jednomu kroku náhodné procházky. Pokud po  $n$  vrstvách kuličky zachytíme, bude jejich četnost pod jednotlivými hřebíky dána binomickým rozdělením (1).



Obr. 1: Galtonova deska pro čtyři kroky náhodné procházky

### Kvantová procházka

Co by se stalo, kdybychom v Galtonově desce kuličky nahradili paprskem světla a místo hřebů použili polopropustné zrcadlo (obr. 2)? Polopropustné zrcadlo rozdělí dopadající paprsek světla na dva výstupní se stejnou intenzitou. Pokud ale na zrcadlo dopadají paprsky z obou směrů, dochází ve výstupních paprscích k interferenci, která může být jak konstruktivní, tak destruktivní. V některých případech tedy dojde k zesílení intenzity světla ve výstupním paprsku, v jiných případech k jeho zeslabení. Když po několika vrstvách polopropustných zrcadel změříme intenzity paprsků světla, které z nich vystupují, dostaneme podstatně jiné rozdělení, než jaké odpovídá četnosti kuliček v klasické Galtonově desce.



Obr. 2: Optická Galtonova deska pro čtyři kroky kvantové procházky

Tento jev lze pozorovat i pro velmi slabé světlo, kdy ve vstupním paprsku bude jen jeden foton. Kvantový popis chování fotonu v optické

Galtonově desce totiž přesně koresponduje s popisem interference světla. Při dopadu fotonu na polopropustné zrcadlo totiž nedojde k jeho náhodnému odrazu či průchodu, ale vytvoří se kvantová superpozice, která následně podléhá interferenci. Pravděpodobnostní rozdělení detekce fotonu po několika vrstvách optické Galtonovy desky bude odpovídat kvantové procházce na přímce, kterou si nyní formálně popíšeme.

V kvantové mechanice platí princip lineární superpozice, který říká, že pokud dva vektory  $|\psi\rangle$  a  $|\varphi\rangle$  popisují stavy částice, pak i jejich libovolná lineární kombinace tvaru  $a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle$  je možný stav této částice. Kvantová částice, která reprezentuje náhodného chodce, se tedy může vyskytovat nejen v libovolné pozici  $m \in \mathbb{Z}$ , ale i ve stavu odpovídajícímu superpozici těchto možností. Označme stav popisující částici v pozici  $m$  symbolem  $|m\rangle$ . Množina všech takových vektorů  $\{|m\rangle, m \in \mathbb{Z}\}$  tvoří bázi vektorového prostoru možných stavů kvantového chodce. Obecný stav chodce je pak popsán vztahem

$$|\psi\rangle = \sum_m \psi_m |m\rangle,$$

kde  $\psi_m$  jsou komplexní čísla, která mají význam amplitudy pravděpodobnosti –  $|\psi_m|^2$  je pravděpodobnost nalezení částice na pozici  $m$ .

Uvažujme nyní částici, která začíná kvantovou procházku v čase  $t = 0$  z pozice  $m = 0$ . Na rozdíl od klasické náhodné procházky budou pravidla popisující její pohyb deterministická. Náhodnost se projeví až v okamžiku, kdy se rozhodneme určit polohu kvantové částice pomocí měření. Stejně jako v klasické náhodné procházce budeme požadovat, aby se kvantová částice mohla během jednoho kroku procházky přesunout ze své aktuální pozice  $m$  do sousedních pozic  $m - 1$  a  $m + 1$ . Místo náhodného výběru výsledné pozice však kvantová částice zvolí obě možnosti najednou. Výsledný stav částice je pak popsán superpozicí stavů  $|m - 1\rangle$  a  $|m + 1\rangle$ . Tyto požadavky splňuje například transformace

$$|m\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|m - 1\rangle + |m + 1\rangle).$$

Ta ale není podle pravidel kvantové mechaniky korektní. Není totiž unitární, což se projevuje tím, že nezachovává pravděpodobnost nalezení částice kdekoli, která musí být po každém kroku rovna jedné. Uvažujme například částici ve stavu superpozice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|-1\rangle + |1\rangle),$$

kdy se částice nachází s pravděpodobností  $|\psi_{-1}|^2 = |\psi_1|^2 = \frac{1}{2}$  na pozici  $-1$  nebo  $1$ . Po jednom kroku kvantové procházky by se stav částice změnil na superpozici

$$\frac{1}{2}|-2\rangle + |0\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle.$$

Takový stav by ale odpovídal situaci, kdy částici můžeme najít na pozicích  $-2$  nebo  $2$  s pravděpodobností  $|\psi_{-2}|^2 = |\psi_2|^2 = \frac{1}{4}$ , a navíc na pozici  $0$  s pravděpodobností  $|\psi_0|^2 = 1$ . Celková pravděpodobnost nalezení částice by tedy byla větší než jedna. Tento problém lze vyřešit tak, že částici přidáme další stupeň volnosti, například spin, který můžeme chápat jako kvantovou variantu mince. Podobně jako v klasické procházce hodnota mince  $L$ , resp.  $R$ , částici určuje, jestli má jít doleva, resp. doprava. Mince je však nyní kvantový objekt, jejím hodnotám  $L$  a  $R$  odpovídají stavy  $|L\rangle$  a  $|R\rangle$ . Obecný stav kvantové mince je pak popsán libovolnou superpozicí těchto bazických stavů. Minci navíc musíme zahrnout do celkového popisu stavu kvantového chodce. Jeho obecný stav je pak dán superpozicí ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_m (\psi_{m,L}|m, L\rangle + \psi_{m,R}|m, R\rangle).$$

Čísla  $\psi_{m,L}$ , resp.  $\psi_{m,R}$ , jsou amplitudy pravděpodobnosti nalezení částice na pozici  $m$  s mincí ve stavu  $L$ , resp.  $R$ . Pravděpodobnost nalezení částice na pozici  $m$  je

$$P(m) = |\psi_{m,L}|^2 + |\psi_{m,R}|^2.$$

Jeden krok kvantové procházky je pak složen ze dvou částí. Nejprve si chodec hodí mincí beze změny své aktuální pozice. Tato část kroku je popsána například transformací

$$\begin{aligned} |m, L\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|m, L\rangle + |m, R\rangle), \\ |m, R\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|m, L\rangle - |m, R\rangle). \end{aligned}$$

Ve druhé části kroku dojde k samotnému posunutí částice podle hodnoty mince, což můžeme popsat pravidly

$$\begin{aligned} |m, L\rangle &\rightarrow |m-1, L\rangle, \\ |m, R\rangle &\rightarrow |m+1, R\rangle. \end{aligned}$$

Lze ukázat, že pro takto definovanou kvantovou procházku se celková pravděpodobnost nalezení částice zachovává.

Pro ilustraci se podívejme, jak bude vypadat vývoj kvantové procházky na přímce v několika prvních krocích. Řekněme, že v čase  $t = 0$  částice začíná procházku v počátku s mincí ve stavu  $R$ . Její počáteční stav je tedy

$$|\psi(t = 0)\rangle = |0, R\rangle.$$

Po jednom kroku kvantové procházky tento stav přejde v superpozici

$$|\psi(t = 1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, L\rangle - |1, R\rangle).$$

Pokud bychom se v tuto chvíli rozhodli určit polohu částice měřením, pak snadno zjistíme, že ji můžeme nalézt s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$  na pozicích  $-1$  nebo  $1$ . To je stejné pravděpodobnostní rozdělení jako v klasické náhodné procházce. Navíc, po měření v kvantové mechanice dochází k tzv. kolapsu vlnové funkce, kdy se ze všech možností obsažených v superpozici náhodně vybere jedna z nich. Měření tedy změní stav kvantové částice. Pokud budeme měřit pozici částice po každém kroku kvantové procházky, dostaneme jednu náhodnou trajektorii. Statistické rozdělení náhodných trajektorií bude zcela identické jako pro klasickou náhodnou procházku. Aby se kvantová procházka lišila od klasické náhodné procházky, musíme částici nechat volně vyvíjet a její polohu měřit až po nějakém předem daném počtu kroků  $n$ . Pak bude každé trajektorii odpovídat ne pravděpodobnost, ale amplituda pravděpodobnosti. Různé trajektorie vedoucí do stejného bodu budou mezi sebou interferovat. Výsledkem bude pravděpodobnostní rozdělení podstatně odlišné od klasické náhodné procházky.

Vraťme se nyní k naší kvantové procházce. Bez měření polohy bude stav částice po dvou krocích popsán superpozicí

$$|\psi(t = 2)\rangle = \frac{1}{2} (|-2, L\rangle + |0, R\rangle - |0, L\rangle + |2, R\rangle).$$

I teď bude pravděpodobnostní rozdělení pozice částice stejné jako pro klasickou procházku. Teprve po třetím kroce kvantové procházky dojde poprvé k interferenci různých trajektorií. Stav kvantové částice je dán superpozicí

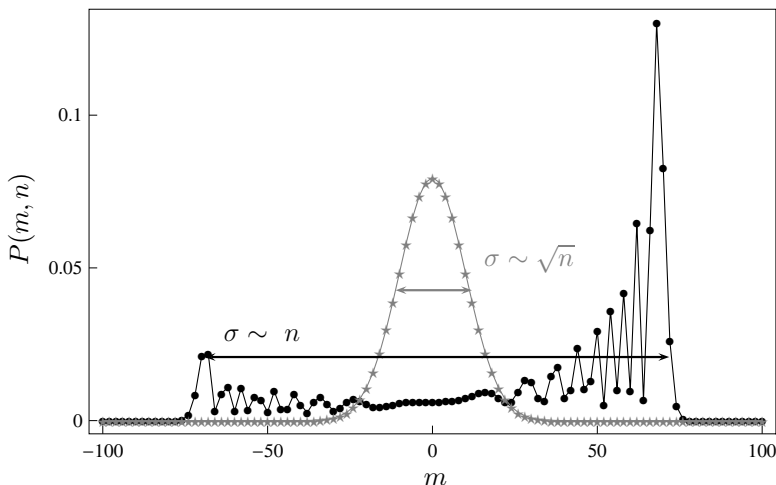
$$|\psi(t = 3)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-3, L\rangle + |-1, R\rangle - 2|1, R\rangle + |1, L\rangle - |3, R\rangle).$$

Pravděpodobnostní rozdělení polohy po třech krocích kvantové procházky

$$P(-3, 3) = \frac{1}{8}, \quad P(-1, 3) = \frac{1}{8}, \quad P(1, 3) = \frac{3}{8}, \quad P(3, 3) = \frac{1}{8},$$

už je odlišné od klasické náhodné procházky, jak se můžeme snadno přesvědčit. Díky volbě počátečního stavu mince  $R$  je kvantová částice s větší pravděpodobností na pravé části přímky. Tato citlivost na počáteční podmínku je pro kvantové procházky typická. Důležitější je však to, že kvantová částice se po přímce šíří rychleji než klasická. Dá se totiž ukázat, že střední kvadratická odchylka polohy pro kvantovou procházku roste lineárně s počtem kroků. Kvantová procházka tak více připomíná šíření vlny než difuzi.

Pro srovnání jsme v obr. 3 vykreslili pravděpodobnostní rozdělení po 100 krocích klasické a kvantové procházky. Rozdíl mezi klasickou difuzí a kvantovým šířením vlny je evidentní.



Obr. 3: Pravděpodobnostní rozdělení pozice částice po 100 krocích klasické náhodné procházky (šedá) a kvantové procházky (černá). Pro klasickou náhodnou procházku je poloha popsána binomickým rozdělením (1). Jeho střední kvadratická odchylka  $\sigma$  roste s odmocninou počtu kroků, což je typické pro difuzi. Naproti tomu u kvantové procházky roste střední kvadratická odchylka lineárně s počtem kroků. Takové chování je charakteristické pro šíření vlny. Díky volbě počátečního stavu mince  $|R\rangle$  je kvantová částice s větší pravděpodobností v pravé části přímky



## Využití kvantových procházek

Kvantové procházky úzce souvisejí s teorií kvantové informace. Ukazuje se, že počítač, který by fungoval na principech kvantové mechaniky, dokáže řešit některé úlohy podstatně efektivněji než klasický počítač. Existuje například algoritmus pro efektivní prohledávání neuspořádané databáze, který je založený na kvantové procházce [1]. Pod pojmem neuspořádaná databáze si můžeme představit třeba telefonní seznam, ve kterém ale chceme najít jméno podle čísla. Seznam je sice uspořádán abecedně, ale toto řazení s čísly nijak nesouvisí. Telefonní čísla jsou v seznamu rozmístěna zcela náhodně. Jakýkoli algoritmus na klasickém počítači by k přiřazení jména k danému telefonnímu číslu potřeboval v průměru ověřit polovinu prvků seznamu. Naproti tomu je možné ukázat, že pomocí kvantové procházky by kvantový počítač dokázal najít hledaný záznam už po takovém počtu iterací, který je dán odmocninou z celkového počtu prvků databáze.

Praktická realizace takového kvantového počítače je však zatím nedostupná. První experimenty s kvantovými procházkami [2, 3, 4] především procházku na přímce, kterou jsme popsali v předchozí části. Ta ale pro implementaci vyhledávacího algoritmu nestačí. Aby totiž kvantová procházka urychlila prohledávání, musí být databáze reprezentována alespoň dvourozměrným grafem. I takové kvantové procházky je dnes možné připravit v experimentech [5]. Pro jejich využití ve vyhledávacím algoritmu je však třeba ještě překonat řadu překážek týkajících se zejména přípravy počátečního stavu a přesnosti jednotlivých operací.

Využití kvantových procházek však není omezeno jen na vyhledávací algoritmy. Ukazuje se, že kvantové procházky mohou sloužit jako základní stavební kámen budoucích kvantových počítačů [6]. Zajímavé jsou i aplikace kvantových procházek mimo oblast kvantové informace. Pomocí kvantových procházek je například možné popsat koherentní přenos energie v molekulárních řetězcích. V tomto ohledu mohou být kvantové procházky generickým procesem při modelování vlastností nových funkčních materiálů.

## Literatura

- [1] Shenvi, N., Kempe, J., Whaley, K. B.: Quantum random-walk search algorithm. *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- [2] Karski, M., Förster, L., Choi, J., Steffen, A., Alt, W., Meschede, D., Wi-

- dera, A.: Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. *Science* **325**, 174 (2009).
- [3] Schmitz, H., Matjeschk, R., Schneider, C., Glueckert, J., Enderlein, M., Huber, T., Schaetz, T.: Quantum walk of a trapped ion in phase space. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090504 (2009).
- [4] Schreiber, A., Cassemiro, K. N., Potoček, V., Gábris, A., Mosley, P. J., Andersson, E., Jex, I., Silberhorn, C.: Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010).
- [5] Schreiber, A., Gábris, A., Rohde, P. P., Laiho, K., Štefaňák, M., Potoček, V., Hamilton, C., Jex, I., Silberhorn, C.: A 2D quantum walk simulation of two-particle dynamics. *Science* **336**, 55 (2012).
- [6] Childs, A. M., Gosset, D., Webb, Z.: Universal Computation by Multiparticle Quantum Walk. *Science* **339**, 791 (2013).

## Matematický siloměr na detekci sociálních interakcí

*Milan Krbálek, FJFI ČVUT, Praha*

**Abstract.** Maybe you never thought of it, but during an ordinary walk in the streets, during moving on the escalator or travelator at the airport there exist between you and nearby pedestrians certain force interactions, which influence the movement of the entire group of people. Moreover, the denser traffic causes stronger interactions. In the most of the cases, however, such an interaction is not like typical physical forces. The reason is that there are no physical contacts among persons. In fact these contacts are represented by the so-called socio-physical interactions when a certain social impulse (eg. an effort to prevent the meeting with unpopular person) leads to a change of physical parameters of your route. Are such forces measurable in principal? Is it possible to describe the attraction among distant humans qualitatively? Although it seems that not, the opposite is true. Let's show you some instruments how to measure social forces.

### Seznámení s problematikou

Je-li našim cílem detekce socio-fyzikálních sil uvnitř pohybující se skupiny osob, je třeba nejprve rozhodnout, které sociální systémy budou