Ľubomíra Balková; Aneta Šťastná

Jsou české mince optimální?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 90 (2015), No. 1-2, 14–22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146613

Jsou české mince optimální?

Ľubomíra Balková, FJFI ČVUT, Praha

Aneta Šťastná, Gymnázium Omská, Praha

Abstract. Have you ever thought about the advantages of Czech coins? And are there any? Is it true that we can pay any sum by a relatively small number of coins? Can we determine an optimal payment by so called greedy algorithm? And what if we add a Czech coin of a new value which could reduce the average number of coins needed for payment? We will answer these questions and we will compare the efficiency of payments in Czech crowns, American cents, British pence, Euro cents and selected exotic systems. We shall see whether the Czech system compares favourably with the others.

Platba pomocí mincí

Platbou pomocí mincí rozumíme skládání všech možných částek do výše nejmenší bankovky co nejefektivněji[1]. Efektivita placení může mít tisíce podob. My ukážeme v článku základní kritéria, jak efektivitu měřit, a podle nich porovnáme efektivitu systémů mincí z tab. 1.

Nejdříve ale zavedeme pojem reprezentace částky, který nám umožní úlohu placení mincemi pořádně zformulovat. Nechť jsou dány hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ (uspořádané vzestupně), přičemž $e_1 = 1$ (aby šlo zaplatit každou částku). Uvažujme částky n v hodnotách od 1 do $N-1$, kde N je hodnota nejmenší bankovky. Každou D-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, kde jednotlivá čísla jsou přirozená nebo nuly a pro kterou platí, že

$$n = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \ldots + a_D \cdot e_D, \tag{1}$$

nazveme *reprezentací* částky n. Počet použitých mincí v dané reprezentaci značíme $\operatorname{cost}(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, tj.

$$\operatorname{cost}(a_1, a_2, \ldots, a_D) = a_1 + a_2 + \ldots + a_D.$$

[1] Ve skutečnosti není omezením, že uvažujeme pouze mince, zatímco bankovky jsou vyloučeny ze hry. Čtenář si jistě sám rozmyslí, jak by se článek změnil, kdyby se zapojily do placení i bankovky.

Příklad 1. V českých korunách platí, že reprezentace 30 Kč je např. $(30, 0, 0, 0, 0, 0)$, protože $30 = 30 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 50$, nebo $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$, protože $30 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 0 \cdot 50$. Proto $\mathrm{cost}(30, 0, 0, 0, 0, 0) = 30$ a $\mathrm{cost}(0, 0, 0, 1, 1, 0) = 2$.

mince	symbol	hodnoty	min bankovka	∅ cost
české koruny	Kč	1,2,5,10,20,50	100	3,434343...
US centy	¢	1,5,10,25	100	4,747474...
euro centy	žádný speciální	1,2,5,10,20,50	100	3,434343...
UK pence	p	1,2,5,10,20,50	100	3,434343...
ázerbájdžánský qəpik	ω vzhůru nohama	1,3,5,10,20,50	100	3,434343...
bahamský cent	B¢	1,5,10,15,20	50	3,571428571

Tab. 1: Systémy mincí používané v Evropě, USA, v Ázerbájdžánu a na Bahamách, které porovnáme podle různých měřítek efektivity placení. Vidíme, že euro centy i britské pence mají stejné nominální hodnoty i nejmenší bankovku jako naše koruny. Proto efektivita těchto tří systémů bude stejná, ať už ji měříme podle jakéhokoliv kritéria. Poslední sloupec uvádí průměrný počet mincí použitých při optimální platbě.

Než se pustíme do samotných úvah o efektivitě, uveďme významnou poznámku. V článku budou uvedeny výsledky, které nelze získat bez použití počítače. Druhá z autorek všechny potřebné programy vytvořila. Má-li čtenář dotaz k programům, nechť tedy kontaktuje A. Šťastnou.

Použití minimálního počtu mincí

Má-li nám prodavačka vrátit 30 Kč, pak budeme jistě raději, když nám dá dvě mince v hodnotách 10 Kč a 20 Kč, než když si v peněžence odneseme třicet jednokorunových mincí. Proto je přirozené definovat *optimální reprezentaci* částky n následovně: Pokud je součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_D$ v reprezentaci n minimální mezi všemi možnostmi, tedy podle zavedeného značení je minimální $\mathrm{cost}(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, pak nazveme $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$ *optimální reprezentací* částky n a označíme $\mathrm{opt}(n; e_1, e_2, \ldots, e_D)$.

Příklad 2. V Čechách potřebujeme k zaplacení částky 30 Kč minimálně dvě mince, a to v hodnotách 10 Kč a 20 Kč. Zapišme to pomocí právě zavedené symboliky $\mathrm{opt}(30; 1, 2, 5, 10, 20, 50) = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$ a $\mathrm{cost}(\mathrm{opt}(30; 1, 2, 5, 10, 20, 50)) = 2$.

Průměrný počet mincí v optimální reprezentaci

Přirozeným požadavkem je, abychom v daném systému mincí v optimálních reprezentacích částek používali průměrně co nejméně mincí.

Pomocí vlastního programu druhá z autorek spočítala průměrný počet mincí používaných v optimálních reprezentacích v jednotlivých systémech – viz poslední sloupec tab. 1. Tedy pro systém mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ a částky od 1 do $N-1$ je v tabulce napočítána hodnota

$$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{cost}(\mathrm{opt}(k; e_1, e_2, \ldots, e_D)). \tag{2}$$

Pozor ovšem – je zřejmé, že s rostoucím počtem mincí klesá průměrný počet mincí potřebných v optimálních reprezentacích částek. Proto není spravedlivé prohlásit, že prohrály americké centy, nýbrž je logičtější porovnávat mezi sebou podle tohoto kritéria systémy obsahující stejný počet mincí. Můžeme tedy například tvrdit, že je z tohoto hlediska český systém stejný jako ázerbájdžánský.

Optimální systém mincí

Podle průměrného počtu mincí v optimálních reprezentacích všech částek se dá hodnotit optimalita systému mincí. Pro pevně daný počet mincí D nazveme systém mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ *optimální*, pokud průměrný počet mincí v optimálních reprezentacích je minimální, tj. uvažujeme-li částky od 1 do $N-1$ (předpokládáme, že všechny jsou stejně pravděpodobné, což v reálném životě díky oblibě částek končících devítkou není pravda), pak požadujeme minimalitu výrazu (2).

Optimální systémy pro $D = 3, 4, 5$ a 6 mincí a s minimální hodnotou bankovky $n = 100$ a také průměrný počet mincí v optimálních reprezentacích pro tyto systémy jsou uvedeny v tab. 2 a byly nalezeny pomocí počítače.

počet mincí D	hodnoty	$\varnothing$ cost
3	1,12,19	5,262626...
4	1,5,18,25	3,969696...
5	1,5,16,23,33	3,363636...
6	1,4,9,24,31,45	2,989898...
6	1,5,8,20,31,33	2,989898...

Tab. 2: Optimální systémy mincí pro tři až šest mincí, tedy systémy, ve kterých při optimálních platbách použijeme průměrně nejméně mincí. Průměrný počet použitých mincí při placení částek od 1 do 99 uvádí poslední sloupec.

Z tab. 2 vidíme, že žádný z reálných systémů mincí není optimální. Ovšem některé mají k optimalitě dost blízko. Podle systému mincí v hodnotách $1, 5, 18, 25$ se jmenuje článek [1], který nás ke zkoumání mincí přivedl: What this country needs is an 18¢ piece. Je totiž vidět, že kdyby se v US systému nahradil desetník mincí v hodnotě 18¢, pak by vznikl optimální systém. Samozřejmě k tomu nedojde, protože lidé neumí rychle zpaměti počítat s číslem 18.

Optimalita versus hladový algoritmus

Jiné z možných hledisek je, aby reprezentace získané tzv. hladovým způsobem byly optimální. *Hladovou reprezentaci* částky n značíme $\mathrm{hlad}(n, e_1, e_2, \dots, e_D)$ a získáme ji tak, že vezmeme co nejvíce mincí v hodnotě e_D, co se do n vejdou, a označíme tento počet a_D. Pak vezmeme co nejvíce mincí v hodnotě e_{D-1}, co se vejdou do $n - a_D \cdot e_D$ atd. Potom získaná reprezentace $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ bude hladová.

Příklad 3. Například při použití českých korun získáme hladovou reprezentaci 46 Kč následovně: Nejprve použijeme dvě dvacetikoruny. Zbude nám tak 6 Kč, což uhradíme jako pětikorunu a korunu. Dostáváme tedy reprezentaci $(1, 0, 1, 0, 2, 0)$, která odpovídá rovnosti

$$46 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 20.$$

Jde o hladovou reprezentaci 46 Kč a snadno se přesvědčíme, že je zároveň optimální.

Jelikož je platba hladovým způsobem přirozená, je dalším logickým požadavkem, aby v systému mincí hladové reprezentace odpovídaly optimálním reprezentacím. Vlastním programem jsme ověřily, že tomu tak je v případě všech systémů z tab. 1.

Příklad 4. Aby nevznikl dojem, že hladová a optimální reprezentace vždy splývají, tak například pro optimální systém čtyř mincí $1, 5, 18, 25$ zaplatíme částku 36 hladovým algoritmem jako

$$36 = 25 + 2 \cdot 5 + 1,$$

zatímco optimálně ji zaplatíme dvěma mincemi v hodnotě 18. Při volbě reálných systémů mincí tedy zřejmě požadavek, aby optimální a hladová reprezentace byly shodné pro všechny uvažované částky, hrál důležitou roli.

Optimální systém mincí pro hladový algoritmus

Když už se zdá, že hladový algoritmus hraje tak důležitou roli pro praktickou práci s mincemi, pojďme najít systémy mincí, které jsou optimální pro hladový algoritmus. Cílem je tudíž najít hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ pro dané D tak, aby průměrný počet mincí použitých v hladové reprezentaci byl minimální. Matematicky zapsáno, hledáme mince, pro které je minimální následující hodnota

$$\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{cost}(\mathrm{hlad}(k; e_1, e_2, \ldots, e_D)).$$

V tab. 3 získané pomocí počítače je shrnuto, jaké systémy $3, 4, 5$ a 6 mincí jsou optimální pro platbu hladovým algoritmem a jaký je průměrný počet mincí použitých v hladové reprezentaci částek v takových systémech.

počet mincí D	hodnoty	⌀ cost
3	1,5,22	5,313131...
3	1,5,23	5,313131...
4	1,3,11,37	4,14...
4	1,3,11,38	4,14...
5	1,3,7,16,40	3,494949...
5	1,3,7,16,41	3,494949...
5	1,3,7,18,44	3,494949...
5	1,3,7,18,45	3,494949...
5	1,3,8,20,44	3,494949...
5	1,3,8,20,45	3,494949...
6	1,2,5,11,25,62	3,161616...
6	1,2,5,11,25,63	3,161616...
6	1,2,5,13,29,64	3,161616...
6	1,2,5,13,29,65	3,161616...

Tab. 3: Optimální systémy mincí pro platbu hladovým algoritmem pro tři až šest mincí, tedy systémy, ve kterých při „hladových“ platbách použijeme průměrně nejméně mincí. Průměrný počet použitých mincí při placení částek od 1 do 99 uvádí poslední sloupec.

Zajímavým pozorováním je, že žádný z těchto systémů není zároveň optimální – jak čtenář ověří porovnáním s tab. 2. Lze tedy prohlásit, že systém, který by byl optimální a zároveň by v něm platba nejmenším počtem mincí splývala s platbou hladovým algoritmem pro tři až šest mincí, neexistuje.

Koho zajímá, jaký je průměrný počet mincí použitých v hladových reprezentacích částek v reálných systémech, uvědomí si, že v systémech z tab. 1 splývá hladová a optimální reprezentace. Proto hledaný údaj vyčteme z posledního sloupce tab. 1.

Omezený počet mincí od každé hodnoty

Jiná efektivita, kterou si můžeme přát, je zaplatit tak, aby počet mincí od každé hodnoty nepřesáhl předepsanou konstantu k. Podívejme se, jak vypadá minimální konstanta k pro námi uvažované systémy. Tedy jaké je minimální k takové, že každou částku zaplatíme maximálně k kusy od každé mince. Výsledky jsou uvedeny v tab. 4.

mince	mez k
české koruny, euro centy, UK pence	2
US centy	4
ázerbájdžánský qəpik	2
bahamský cent	4

Tab. 4: Minimální počet mincí k takový, že pomocí k mincí od každé hodnoty zaplatíme každou částku do hodnoty menší než nejmenší bankovka.

Rovnoměrné používání mincí

Mincovna jistě potřebuje vědět, jak moc se jednotlivé mince používají. Může podle toho volit jejich kvalitu a ví, jak často je potřeba jednotlivé hodnoty mincí razit, předpokládáme-li, že nejvíce užívané je třeba razit nejčastěji. A jak často používáme jednotlivé hodnoty mincí v optimálních reprezentacích? Na to se podívejte do tab. 5, která zastoupení jednotlivých mincí pro reálné systémy uvádí.

V případě ázerbájdžánského qəpiku není optimální platba nutně jednoznačná. Například částku v hodnotě 9 qəpiků lze zaplatit jako $3 \cdot 3$ i jako $1+3+5$. Proto máme v tab. 5 u ázerbájdžánského qəpiku tři řádky: první odpovídá platbám, kdy upřednostňujeme trojqəpik, třetí platbám, kdy dáváme přednost pětiqəpiku, a v prostředním volíme kompromis. Vidíme, že když upřednostníme pětiqəpik, je takový systém nejvyváženější ze všech uvažovaných systémů. Naopak za nejhorší lze považovat z hlediska rovnoměrného použití mincí americké centy.

mince	1	2	3	5	10	15	20	25	50
české koruny, euro centy, UK pence	40	80	0	50	40	0	80	0	50
US centy	200	0	0	40	80	0	0	150	0
ázerbájdžánský qəpik	50	0	100	20	40	0	80	0	50
	60	0	80	30	40	0	80	0	50
	70	0	60	40	40	0	80	0	50
bahamský cent	100	0	0	5	10	40	20	0	0

Tab. 5: Uvádíme, kolikrát jsou použity jednotlivé mince při optimálních platbách ve zkoumaných reálných systémech.

Jakou minci přidat pro přiblížení optimalitě?

Mince obvykle mizí (vzpomeňme relativně nedávno zaniklé padesátníky). My si teď ale na chvíli představíme opačnou situaci a budeme se ptát, jakou jednu minci přidat, aby se snížil co nejvíce průměrný počet mincí v optimální reprezentaci. Tedy máme-li mince $e_1, e_2, \ldots, e_D$, jakou máme přidat minci e_{D+1}, aby byl minimální součet

$$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{cost}(\operatorname{opt}(k; e_1, \ldots, e_D, e_{D+1})).$$

Příklad 5. Pro centy je nejvýhodnější přidat 32¢, pak v systému mincí v hodnotách $1, 5, 10, 25, 32$ je průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do 99 roven $3{,}454545\ldots$.

Jakou minci přidat, aby se hladová platba přiblížila optimalitě?

Kdyby se stát rozhodl vyrobit novou minci, pak by bylo možná vhodné, díky optimalitě hladového algoritmu, zodpovědět následující otázku: Jakou jednu minci přidat, aby se snížil co nejvíce průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci, tj. máme-li mince $e_1, e_2, \ldots, e_D$, jakou máme přidat minci e_{D+1}, aby byl minimální součet

$$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{cost}(\operatorname{hlad}(k; e_1, \ldots, e_D, e_{D+1})).$$

Příklad 6. Při přidání centů v hodnotě 2 nebo 3 k mincím v hodnotách $1, 5, 10, 25$ se nejvíce sníží průměrný počet mincí v hladovém algoritmu, a to ze 4,747474… na 3,898989… (USA v historii mince v hodnotě 2¢ a 3¢ používaly.)

Co platí pro směnu?

Při směnné transakci můžeme dát částku dohromady tak, že zákazník platí a prodavač mu vrací. Vysvětleme, co rozumíme reprezentací částky při směnné transakci. Nechť jsou dány hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ (uspořádané vzestupně). Uvažujme částky n v hodnotách od 1 do $N-1$, kde N je hodnota nejmenší bankovky. Každou D-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$, takovou, že

$$n = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \ldots + a_D \cdot e_D,$$

nazveme *směnnou reprezentací* částky n. Počet použitých mincí v dané reprezentaci je pak $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_D|$.

Příklad 7. Platíme-li za nákup 46 Kč, pak při směnné transakci stačí, když zaplatíme padesátikorunou a prodavač nám vrátí dvě dvoukoruny. Do hry se tedy zapojily tři mince, zatímco v příkladu 3 byly pro platbu 46 Kč bez možnosti vracení potřeba minimálně čtyři mince.

Pro směnu si můžeme klást analogické otázky jako při platbě bez vracení. Zkuste si je zodpovědět sami.

Jsou české mince optimální?

Na základě prozkoumaných kritérií lze říci, že na tom naše mince nejsou špatně, i když netvoří ani optimální systém, ani optimální systém pro platbu hladovým algoritmem. Průměrný počet použitých mincí není vysoký a na zaplacení každé částky nám stačí mít v peněžence od každé hodnoty dva kusy mincí. A jelikož se s nimi dobře počítá, můžeme být jakožto uživatelé spokojení.

Závěr

Pokud budete chtít odpovědi týkající se dalších kritérií efektivity zkontrolovat nebo se budete chtít podívat na mince z dalších možných úhlů pohledu, kontaktujte nás nebo se rovnou zapojte do SOČ práce Optimální mince a bankovky [2].

Literatura

[1] Kleber, M., Vakil, R., Shallit, J.: What this country needs is an 18¢ piece. *Mathematical Intelligencer* **25**, 2 (2003), 20–23.
[2] Optimální mince a bankovky. (webová stránka se zadáním SOČ práce) `www.kmlinux.fjfi.cvut.cz/ balkolub/SOCbankovky.`
[3] Šimsa, Š.: Měnová reforma s využitím počítače. *Studentský matematicko-fyzikální časopis M&M*, roč. 16, č. 4 (2009).

Kvantové procházky

Martin Štefaňák, Igor Jex, FJFI ČVUT, Praha

Abstract. First, we will present a mathematical model of a simple stochastic process – a random walk on a line. Then, we will show in which aspects is the situation different if the walking particle obeys the quantum mechanics laws. Finally, we will discuss what the quantum walks can be used for.

Klasická náhodná procházka

Náhodná procházka je matematický model popisující trajektorii sestávající z náhodných kroků. Nachází uplatnění v různých vědních oborech, např. ve fyzice jako model difuze, v biologii pro studium šíření nákazy v přírodním prostředí, v ekonomii pro popis pohybu cen akcií na burze nebo v informatice jako součást některých algoritmů souvisejících s prohledáváním a analýzou velkého objemu dat.

Nejjednodušší model klasické náhodné procházky je náhodná procházka na přímce. Představme si opilého námořníka, který se pokouší dostat z hospody (pozice $m = 0$) domů. Zapomněl ale, jestli má jít doprava nebo doleva. Rozhodne se tedy, že si hodí mincí a podle hodnoty hodu, označme je třeba L a R, udělá krok doleva nebo doprava. Předpokládejme, že mince je vyvážená, tj. hodnota L i R padne se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Poloha námořníka po n krocích je tedy náhodná veličina. Pravděpodobnost, že ho najdeme na pozici m, je určena počtem trajektorií, které v m končí. Aby se dostal do pozice m, musí celkem udělat $\frac{n+m}{2}$ kroků doprava a $\frac{n-m}{2}$ kroků doleva. Snadno zjistíme, že počet všech takových trajektorií je dán kombinačním číslem $\binom{n}{\frac{n+m}{2}}$. Pravdě-