Jaroslav Zhouf

Užitečné rozšíření definice kombinačního čísla

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 4, 14–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146595

Užitečné rozšíření definice kombinačního čísla

Jan Zhouf, Gymnázium Špitálská, Praha

Abstract. The article presents the possibility of extending the high school definition of combinatorial numbers. This is demonstrated on the example of a combinatorics problem from a high school mathematical textbook and its solution based on the use of combinatorial numbers, where the traditional definition of combinatorial numbers restricts the solution.

Úvahy v tomto článku vyprovokovalo řešení jedné středoškolské kombinatorické úlohy z učebnice [1, s. 32]. Je tam požadováno, aby řešení bylo provedeno pomocí kombinačních čísel. Tento požadavek však v sobě nese určité omezení na počet prvků, jichž se úloha dotýká. Přitom není složité všimnout si, že kdybychom připustili poněkud širší definici kombinačního čísla, než jakou známe ze střední školy, byla by úloha řešitelná bez omezení. A skutečně takové rozšíření kombinačních čísel v matematice existuje.

Zmiňovaná úloha: *Vyjádřete kombinačními čísly, kolika způsoby může m chlapců a n dívek utvořit taneční pár.*

Učebnice požaduje provést řešení pomocí kombinačních čísel. Znamená to nejdříve určit všechny možné dvojice nehledě na pohlaví, což dává počet $\binom{m+n}{2}$, a pak (podle určitých konvencí) odečíst dvojice, které mezi sebou vytvoří stejné pohlaví, tj. odečíst počty $\binom{m}{2}$ a $\binom{n}{2}$. Celkový počet párů, který také nalezneme ve zmíněné učebnici na s. 160, je

$$\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2}.$$

Podle definice kombinačního čísla ale vzniká podmínka, že počet chlapců i počet dívek musí být větší nebo roven dvěma.

Tato podmínka je nešťastně omezující, neboť je jasné, že lze vytvořit nějaký pár, i kdyby byla jen jedna dívka nebo jen jeden chlapec. Dokonce by se dal určit výsledek, i kdyby nebyla žádná dívka nebo žádný chlapec. Úloha by šla jednoduše vyřešit kombinatorickým pravidlem součinu: Počet možných párů je mn, kde $m \geq 0$, $n \geq 0$.

Co kdyby se rozšířila definice kombinačních čísel o možnosti $\binom{1}{2} = 0$ a $\binom{0}{2} = 0$? Matematika skutečně takovéto možnosti definuje, protože to je na mnoha místech užitečné.

Na střední škole se většinou definuje kombinační číslo takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

kde n, k jsou celá nezáporná čísla a $n \geq k$.

Je ale možné také definovat kombinační číslo ekvivalentním vztahem

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

a nepožadovat, aby bylo číslo n celé nezáporné a $n \geq k$; požadavek na číslo k celé nezáporné kvůli nutnému měnění hodnot n a k o jedna ale zachováme. V takovémto případě je možné počítat i zmíněné hodnoty

$$\binom{1}{2} = \frac{1 \cdot (1-1)}{1 \cdot 2} = 0, \qquad \binom{0}{2} = \frac{0 \cdot (0-1)}{1 \cdot 2} = 0,$$

nebo např.

$$\binom{3}{6} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 0.$$

Je ale také možné počítat např. i hodnoty:

$$\binom{2{,}7}{3} = \frac{2{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0{,}5355$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{35}{128}$$

Toto rozšíření definice kombinačních čísel a jejich využití uvádějí mnohé zdroje, např. [2, 3].

Literatura

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* Čtvrté, upravené vydání, Prometheus, Praha, 2006.

[2] Wikipedie: `http://cs.wikipedia.org/wiki/Kombinační_číslo`.

[3] Thukral, A. K.: *Factorials of real negative and imaginary numbers – A new perspective.* `http://www.springerplus.com/content/pdf/2193-1801-3-658.pdf`.