Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Boháč

Co je harmonického na harmonické čtveřici?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 4, 1–13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146593`

Co je harmonického na harmonické čtveřici?

Pavel Boháč, PřF MU Brno

Abstract. The article describes an interesting connection between harmonic tetrads on a line and geometrical optics, thus explaining the origin of the name. It is also demonstrated how to apply this connection in the construction of harmonic tetrads. Moreover, the role of harmonic tetrads in the circle of Apollonius is shown.

Úvod

Harmonická čtveřice představuje jisté významné rozložení čtyř různých bodů na přímce, které v tomto příspěvku popíšeme a objasníme, proč v jejím názvu figuruje zvláštní přívlastek „harmonická“[1]. Zároveň tento čistě geometrický konstrukt opodstatníme fyzikálně, když ukážeme, jak úzce souvisí se zobrazováním *dutým zrcadlem*. Právě tato souvislost nám poskytne jednu z možností, jak vcelku snadno, hlavně však názorně, doplnit trojici daných *kolineárních bodů* (tj. bodů ležících na jedné přímce) v rovině bodem čtvrtým tak, aby společně vytvořily harmonickou čtveřici.

Dělicí poměr a dvojpoměr

Pro zavedení harmonické čtveřice bude třeba dvou elementárních pojmů z geometrie přímky, které nejprve stručně vysvětlíme.

Dělicí poměr trojice různých kolineárních bodů A, B, C v tomto pořadí je definován jako reálné číslo λ z vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}. \tag{1}$$

Pro dělicí poměr λ přitom budeme v dalším textu používat běžného označení $\lambda = (C; A, B)$.

Ze vztahu (1) je zřejmé, že dělicí poměr libovolné trojice různých kolineárních bodů je definován vždy, a to tak, že je různý od nuly i jedné

[1] Harmonie – slovo starořeckého původu ve významu souhra, soulad, souzvuk.

a nabývá záporných hodnot jedině tehdy, když bod C leží (na přímce) mezi body A, B.

Jako *dvojpoměr čtveřice* různých kolineárních bodů A, B, C, D označujeme poměr dělicích poměrů $(C; A, B)$ a $(D; A, B)$ v tomto pořadí a užíváme pro něj symbolu (A, B, C, D), tedy

$$(A, B, C, D) = (C; A, B) : (D; A, B)\,. \tag{2}$$

Není obtížné domyslet, že podobně jako dělicí poměr, je i dvojpoměr vždy různý od nuly i jedné a je záporný tehdy a jenom tehdy, když znaménka v něm vystupujících poměrů jsou nesouhlasná. To nastane pouze v situaci, kdy právě jeden z dvojice bodů C, D je vnitřním bodem úsečky AB a druhý leží (na přímce AB) mimo ni. Jedná se tak o jedno z uspořádání $ADBC$, $ACBD$, $DACB$ nebo $CADB$, při kterých ani body A, B, ani body C, D spolu „nesousedí".

Přímku, na které rozmístění čtyř bodů zkoumáme, můžeme známým způsobem (volbou počátku O a jednotkové úsečky OJ) proměnit v číselnou osu, na níž je poloha každého bodu určena jeho souřadnicí. Libovolné čtyři různé kolineární body A, B, C, D tak budou po řadě reprezentovány reálnými čísly a, b, c, d (svými souřadnicemi). Potom dostaneme z rovností (1) a (2) pro dělicí poměr $(C; A, B)$ a dvojpoměr (A, B, C, D) vyjádření

$$(C; A, B) = \frac{c-a}{c-b},$$

$$(A, B, C, D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}. \tag{3}$$

Dohodněme se, že budeme i další kolineární body značené velkými písmeny latinské abecedy reprezentovat reálnými čísly označenými odpovídajícími písmeny malými.

V našich navazujících úvahách se ukáže být užitečné ještě vyjádřit dvojpoměr (A, B, C, D) v podobě podílu dvou rozdílů

$$(A, B, C, D) = \frac{\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{d-a}}{\dfrac{1}{b-a} - \dfrac{1}{c-a}}. \tag{4}$$

Platnost vzorce (4) přitom ověříme postupnou úpravou složeného zlomku vystupujícího na jeho pravé straně:

$$\frac{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{d-a}}{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{c-a}}=\frac{\dfrac{d-a-b+a}{(b-a)\,(d-a)}}{\dfrac{c-a-b+a}{(b-a)\,(c-a)}}=\frac{d-b}{d-a}:\frac{c-b}{c-a}=$$
$$=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=(A,B,C,D)$$

Harmonická čtveřice bodů na přímce

Jestliže čtyři různé kolineární body A, B, C, D vyhovují podmínce $(A,B,C,D)=-1$, říkáme, že (v tomto pořadí) tvoří *harmonickou čtveřici*. Jelikož je její dvojpoměr záporný, podle předchozího víme, že body A, B, C, D harmonické čtveřice budou na přímce rozloženy v pořadí $ADBC$, $ACBD$, $DACB$ nebo $CADB$.

Klíčovou roli pro fyzikální interpretaci harmonické čtveřice bude hrát následující ekvivalentní vyjádření skutečnosti, že čtveřice různých kolineárních bodů A, B, C, D tvoří čtveřici harmonickou [2, s. 43]. Právě v této situaci totiž platí

$$\frac{2}{b-a}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{d-a}. \tag{5}$$

Skutečně, podle zavedení harmonické čtveřice a vzorce (4) vidíme, že čtyři různé kolineární body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici právě tehdy, když jejich souřadnice vyhovují rovnosti

$$\frac{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{d-a}}{\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{c-a}}=-1 \quad \text{čili} \quad \frac{1}{b-a}-\frac{1}{d-a}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{b-a}, \tag{6}$$

a odtud již okamžitě plyne platnost rovnice (5) pro harmonickou čtveřici bodů A, B, C, D. Zároveň se ze vztahů (6) snadno vidí, že v dotyčné harmonické čtveřici lze zaměnit body C, D, přičemž výsledné uspořádání bude stále harmonickou čtveřicí. Podobně lze v harmonické čtveřici zaměnit i body A, B. Označíme-li totiž $(A,B,C,D)=\lambda$, dostaneme pro dvojpoměr (B,A,C,D) podle vztahu (3)

$$(B,A,C,D)=\frac{c-b}{c-a}:\frac{d-b}{d-a}=\frac{1}{\lambda}.$$

Pokud tedy body A, B, C, D tvoří v tomto pořadí harmonickou čtveřici, tj. platí-li $\lambda=-1$, pak rovněž čtveřice B, A, C, D je harmonická.

V situaci, kdy bod A splývá s počátkem O číselné osy (tj. je reprezentován číslem 0), přejde vztah (5) v jednodušší rovnost

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}, \tag{7}$$

která je někdy (zejména ve frankofonních zemích) označována jako *Descartesův*[2] *vztah*.

Pokusme se nyní alespoň stručně naznačit šíři souvislostí, které s sebou rovnost (7) přináší. Pro kladná reálná čísla c a d totiž vyjadřuje skutečnost, že číslo b je jejich *harmonickým průměrem*. Připomeňme, že harmonický průměr H (statistického) souboru n kladných reálných čísel $x_1,x_2,\ldots,x_n$ je definován rovností

$$H=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{-1}=\frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\quad\text{neboli}\quad\frac{n}{H}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}.$$

Čtenáři je patrně známo, jak lze pomocí aritmetických a geometrických průměrů charakterizovat běžné posloupnosti čísel, kterým říkáme *aritmetické* a *geometrické*. Méně známá je však skutečnost, že rovněž významná řada[3]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

má svůj název *harmonická* odvozen stejným způsobem: každý člen této řady (s výjimkou prvního) je harmonickým průměrem obou svých sousedních členů. To je vlastnost členů posloupností, kterým někdy říkáme *harmonické*. Jejich pojmenování souvisí s tzv. *alikvotními*[4], neboli

---

[2] René Descartes (1596–1650) – významný francouzský filosof, matematik a fyzik, který se mj. zabýval analytickou optikou, mnohými pokládaný za zakladatele analytické geometrie, jehož jméno se dodnes odráží v pojmu kartézské soustavy souřadnic.

[3] Pro zajímavost doplňme, že dotyčná řada *nemá* konečný součet.

[4] Alikvótní – slovo latinského původu odkazující na složení celku z částí v jejich přirozených násobcích.

vyššími harmonickými tóny, které jsou předmětem studia *akustiky* čili nauky o vzniku a šíření zvuku. Vlnové délky[5] odpovídající těmto tónům totiž společně s vlnovou délkou *základního tónu* tvoří právě členy jisté harmonické posloupnosti, viz např. [1, s. 476 a 477].[6] Lze tak z tohoto místa vytušit spojení geometrie prostřednictvím harmonické čtveřice vedoucí až k *nauce o harmonii*, jež je součástí hudební vědy.

Harmonická čtveřice a zrcadlo

Rovnice (7) přirozeně hraje významnou roli nejen v akustice, ale i dalších odvětvích fyziky. Tak kupříkladu známý vztah pro výpočet celkového odporu R_p dvou paralelně zapojených rezistorů s odpory R_1 a R_2 je tvaru

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

My však nyní obrátíme svoji pozornost na nápadnou podobnost rovnice (7) s rovnicí, která je dobře známa z *geometrické optiky*, a sice

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}, \tag{8}$$

kde $c = 2f$, nesoucí název *zobrazovací rovnice kulového zrcadla*, případně *tenké čočky*, též *Descartesova* či *Gaussova*[7] *(zobrazovací) rovnice*. Vidíme, že první z rovnic (8) v řeči dvojpoměru vyjadřuje skutečnost $(O, C, A, A') = -1$.

Pro náš účel uvážíme druhou rovnici z (8) pro *duté kulové zrcadlo*. Tato rovnice totiž právě v uvedeném tvaru (v reálné situaci pouze přibližně) udává závislost mezi vzdáleností $a > 0$ zobrazovaného (bodového) předmětu A od vrcholu zrcadla umístěného na optickou osu o před zrcadlem a obrazovou vzdáleností a' jeho obrazu A' při známé ohniskové vzdálenosti f ohniska F od vrcholu zrcadla. Vzdálenost a' je kladná pro (skutečný, reálný[8]) obraz vzniklý před zrcadlem a záporná pro (myšlený, nereálný, zdánlivý) obraz vzniklý za zrcadlem. Ohnisková vzdálenost f je

[5] Např. při šíření dotyčného zvuku ve vzduchu, ale i jiném pružném prostředí.

[6] Dodejme, že frekvence těchto tónů tvoří naopak aritmetickou posloupnost složenou z frekvence základního tónu a jejích přirozených násobků, odkud pochází přívlastek „alikvótní“.

[7] Carl Friedrich Gauß (1777–1855) – německý matematik a fyzik, jeden z největších matematiků všech dob.

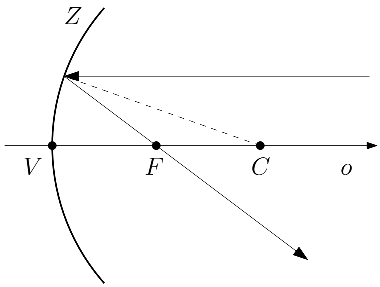
[8] Tj. takový, který je možné zobrazit na stínítko.

polovinou poloměru $c > 0$ kulové plochy tvořící odrazivý povrch zrcadla, tedy $f = \frac{c}{2}$, viz např. [1, s. 937, 938].

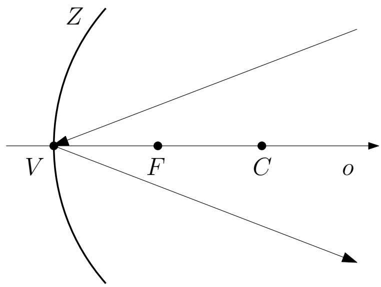
Shodný tvar rovnic (8) a (7) nás tak přivádí na myšlenku využít postupu grafického zobrazování předmětů kulovým zrcadlem (známého už ze základní školy) ke konstrukci harmonických čtveřic bodů na přímce, kterou jsme slíbili v úvodu našeho článku a kterou nyní popíšeme.

Konstrukce harmonické čtveřice

V tomto příspěvku se nebudeme věnovat hlouběji fyzikálnímu pozadí situace, místo toho rovnou uvedeme finální konstrukci, jejíž správnost poté ověříme algebraickým výpočtem. Naznačme alespoň, že konstrukce vychází z poznatku, že paprsky rovnoběžné s optickou osou o se po dopadu na zrcadlo Z lámou směrem do ohniska F (obr. 1a) a paprsky mířící k vrcholu V zrcadla se lámou souměrně podle optické osy o zrcadla (obr. 1b). Podrobnější rozbor problematiky zobrazování čočkami a zrcadly lze najít např. v knize [1, s. 921–940].



(a)

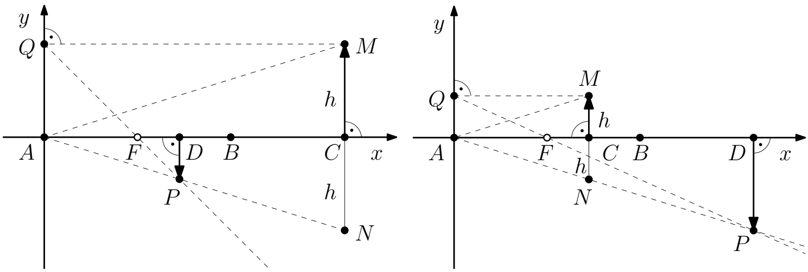


(b)

Obr. 1

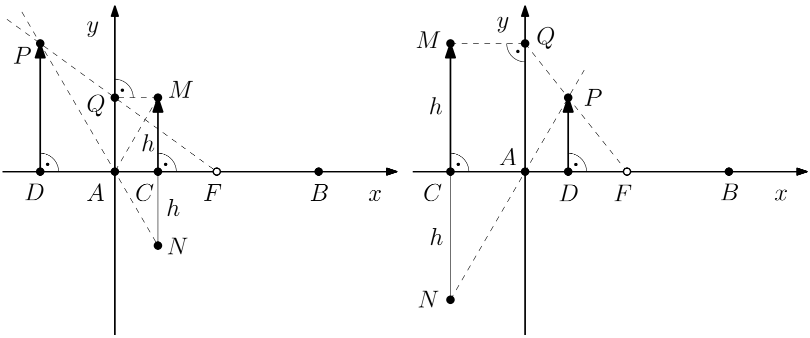
Mějme tedy v rovině s kartézskou soustavou souřadnic Oxy dány tři navzájem různé body A, B, C ležící na jedné přímce tak, že bod C není středem úsečky AB (důležitost tohoto předpokladu bude zřejmá později). Naším úkolem bude sestrojit bod D tak, aby společně s body A, B, C vytvořil harmonickou čtveřici A, B, C, D.

Přímku, na níž leží body A, B, C, přitom můžeme bez újmy na obecnosti považovat za osu x (číselnou osu z našeho předchozího výkladu) a bod A ztotožnit s počátkem soustavy souřadnic. Nechť je navíc pro určitost $b > 0$ (obr. 2 a 3). Označme F střed úsečky AB (ohnisko). Na kolmici k ose x jdoucí bodem C vyznačme dva různé body M a N, které mají od bodu C stejnou vzdálenost $h > 0$ (jak se později ukáže, její konkrétní hodnota není pro konstrukci podstatná). Označme dále kolmý průmět Q bodu M na osu y (ta zde vystupuje v roli zrcadla). Průsečík přímky QF s přímkou AN označme P. Jeho kolmý průmět na osu x je pak hledaný bod D.



(a) $ADBC$ (b) $ACBD$

Obr. 2



(a) $DACB$ (b) $CADB$

Obr. 3

Správnost konstrukce ověříme tak, že nejprve běžným postupem známým z analytické geometrie nalezneme první kartézskou souřadnici průsečíku P přímek QF a AN neboli souřadnici d bodu D. Pak ukážeme, že jedině pro ni platí $(A, B, C, D) = -1$. Pro určitost předpokládejme, že pro druhou kartézskou souřadnici m_y bodu M máme $m_y = h > 0$, že tedy bod M se v souladu s obr. 2 a 3 nachází „nad“ osou x. Směrnicová rovnice přímky QF je tvaru

$$y = -\frac{h}{f}x + h, \qquad (QF)$$

kde $f = |AF| = \frac{|AB|}{2} = \frac{b}{2}$, neboť se jedná o rovnici přímky, jíž vyhovuje jak bod F s kartézskými souřadnicemi $[f, 0]$, tak (od něj různý) bod Q s kartézskými souřadnicemi $[0, h]$. Podobně je směrnicová rovnice přímky AN tvaru

$$y = -\frac{h}{c}x, \tag{AN}$$

neboť kartézské souřadnice jejích bodů A, N jsou po řadě $[0, 0]$, $[c, -h]$.

Porovnáním rovnic (QF) a (AN) dostaneme pro souřadnici d bodu D rovnici

$$-\frac{h}{c}d = -\frac{h}{f}d + h,$$

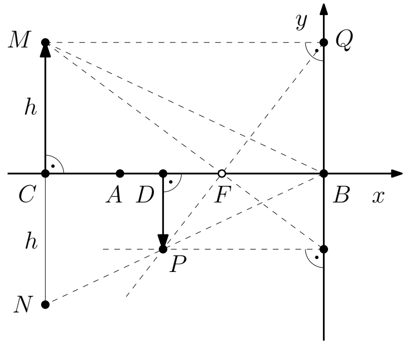
odkud po vydělení číslem $h \neq 0$ a dalšími postupnými úpravami získáme

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \text{neboli} \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

kde jsme nakonec využili vztahu $b = 2f$. Dostali jsme se tak ekvivalentními úpravami až k rovnosti (7), která ovšem v případě $A = 0$ říká, že $(A, B, C, D) = -1$, a tím je správnost konstrukce ověřena.

Obr. 2 a 3 znázorňují všechny možné typy uspořádání čtyř různých kolineárních bodů A, B, C, D, jejichž dvojpoměr (A, B, C, D) je roven -1. Jsou jimi přitom vyčerpána všechna čtyři „dovolená“ pořadí $ADBC$, $ACBD$, $DACB$, $CADB$ těchto čtyř bodů na přímce, kdy jejich dvojpoměr je záporný. Rovněž si povšimněme, že z uvedených obrázků je dobře patrná záměnnost rolí bodů C a D a odtud plynoucí možnost využití i „paprsků“ směřujících nejprve do ohniska a odrážejících se po dopadu na „zrcadlo“ rovnoběžně s „optickou“ osou x při konstrukci harmonické čtveřice bodů na přímce (jak je mj. naznačeno na obr. 4).

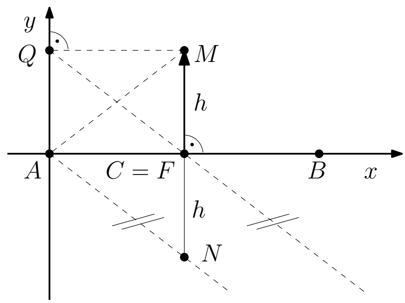
Ještě upozorněme, že obr. 3b odráží situaci, která je fyzikálně zcela nesmyslná, že se totiž zrcadlem zobrazuje předmět umístěný v prostoru za zrcadlem. Geometricky zde nenastává potíž, ovšem v případě, že bychom chtěli harmonickou čtveřici nalézt, resp. demonstrovat všechna možná uspořádání jejích bodů na přímce experimentálně, a to pomocí skutečného dutého kulového zrcadla, situací bychom byli nuceni se zabývat. Tuto překážku však lze elegantně obejít tím, že využijeme záměnnost bodů A, B v harmonické čtveřici bodů A, B, C, D, tudíž zrcadlo (osu y) kolmé k ose x přemístíme z bodu A do bodu B, tj. bod B ztotožníme s počátkem nové soustavy souřadnic (porovnejte obr. 4 s obr. 3b).



Obr. 4

Umístěním zrcadla do bodu B lze navíc i v situaci zachycené na obr. 3a docílit toho, že bod D se bude nacházet v prostoru „před zrcadlem“, bude tedy možné jej v reálné situaci zachytit na stínítko, což je v případě demonstrace umožňující měření vzdáleností jednotlivých bodů silně žádoucí. Vysvětlili jsme tak, že ve všech čtyřech možných uspořádáních harmonické čtveřice A, B, C, D (obr. 3 a 4) lze dosáhnout toho, že se oba body C a D budou nacházet „před zrcadlem“.

Na závěr dodejme, že z uvedené konstrukce je dobře patrné, proč je důležitý požadavek, aby bod C nesplýval se středem úsečky AB. Opak totiž odpovídá známé fyzikální situaci, kdy zobrazovaný předmět je umístěn přímo do ohniska zrcadla. V tomto případě jsou totiž přímky QF a AN evidentně rovnoběžné a různé (obr. 5), neprotnou se proto nikde v konečném bodě (ke stejnému závěru bychom došli i dosazením $c = \frac{b}{2}$ do rovnice (7) pro neznámou d).



Obr. 5

Harmonická čtveřice a Apolloniova kružnice

Harmonická čtveřice bodů se v geometrii objevuje v několika dalších zajímavých souvislostech. Uveďme alespoň jeden významný příklad, jímž je její spojení s tzv. *Apolloniovou*[9] *kružnicí*, kterou nyní popíšeme a roli harmonické čtveřice bodů při její konstrukci objasníme.

Uvažujme dva libovolné různé body A a B ležící v rovině a určeme množinu těch bodů roviny majících daný poměr λ vzdáleností od dotyčných bodů (v uvedeném pořadí), tedy množinu bodů P zadanou podmínkou

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \lambda > 0. \tag{9}$$

V případě, kdy $\lambda = 1$, je onou množinou zřejmě osa úsečky AB. Předpokládejme tedy, že poměr λ je různý od jedné a uvažujme body C a D takové, že $(C; A, B) = -\lambda$ a $(D; A, B) = \lambda$, kdy bod C je vnitřním bodem úsečky AB a bod D leží mimo ni (na přímce AB) a platí pro ně

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda. \tag{10}$$

Poslední rovnost, jež říká, že oba body C a D jsou body hledané množiny, lze zřejmě přepsat do podoby

$$\frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|} = 1$$

neboli

$$(C; A, B) : (D; A, B) = (A, B, C, D) = -1, \tag{11}$$

tedy čtveřice A, B, C, D je (pro libovolnou hodnotu $1 \neq \lambda > 0$) harmonická. Uvažujme dále jeden konkrétní bod P vyhovující rovnici (9) neležící na přímce AB a ukažme, že je bodem kružnice sestrojené nad průměrem CD.[10]

---

9) Apollónios z Pergy (asi 262 př. n. l. – 190 př. n. l.) – starověký řecký geometr a astronom.

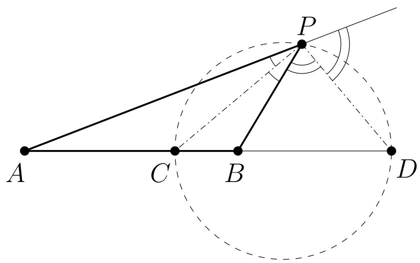
10) Existence takových bodů P je zřejmá, jejich příklady můžeme konstruovat jako průsečíky kružnic se středy A, B a libovolnými poloměry r_A, r_B vázanými podmínkou $r_A : r_B = \lambda$.

Známý poznatek geometrie trojúhelníku říká, že osa vnitřního úhlu libovolného trojúhelníku dělí jeho protější stranu v poměru rovném poměru délek přilehlých stran. Obdobné tvrzení platí rovněž pro osy vnějších úhlů libovolného trojúhelníku.[11)]

Jelikož v naší situaci platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \lambda = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \text{a} \quad \frac{|AP|}{|BP|} = \lambda = \frac{|AD|}{|BD|},$$

body C a D představují průsečíky přímky AB s osou vnitřního a vnějšího úhlu trojúhelníku ABP při jeho vrcholu P. Z obr. 6 je však patrné, že úhel CPD proti společné straně CD všech dotyčných trojúhelníků CPD je pravý, proto každý bod P vyhovující rovnici (9) leží na *Thaletově*[12)] *kružnici* sestrojené nad průměrem CD.



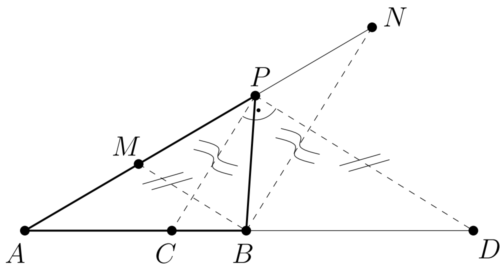
Obr. 6

Ukažme naopak, že libovolný bod P (neležící na přímce AB) kružnice, jejímž průměrem je úsečka CD, vyhovuje vztahu (9). Uvažujme úsečku BM rovnoběžnou s úsečkou DP a úsečku BN rovnoběžnou s úsečkou CP (body M, N leží na přímce AP, obr. 7). Z podobnosti dvojic trojúhelníků AMB a APD, resp. ANB a APC, obdržíme následující rovnosti

$$\frac{|AP|}{|MP|} = \frac{|AD|}{|BD|} \quad \text{a} \quad \frac{|AP|}{|NP|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

11) K ověření těchto dvou výsledků stačí užitím sinové věty vyjádřit poměry dotyčných stran ve dvojicích trojúhelníků APC a BPC, resp. APD a BPD; přesvědčte se o tom sami.

12) Thalés z Milétu (asi 625 př. n. l. – 545 př. n. l.) – předsókratovský řecký filosof, geometr a astronom mnohými pozdějšími učenci pokládaný za prvního filosofa.



Obr. 7

Jelikož platí

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda,$$

plyne odtud, že

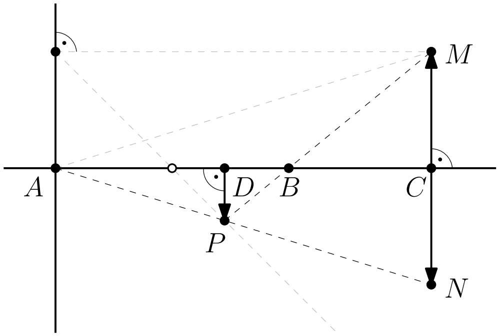
$$\frac{|AP|}{|MP|} = \frac{|AP|}{|NP|},$$

tudíž $|MP| = |NP|$. Protože bod P leží na kružnici s průměrem CD, je úhel CPD pravý, stejně jako úhel MBN. Bod B je proto bodem kružnice se středem P a poloměrem $|MP|$. Odtud máme $|MP| = |BP|$ a následně

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AP|}{|MP|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda,$$

takže bod P skutečně splňuje rovnost (9). Dostáváme tak, že v případě $\lambda \neq 1$ je množinou bodů zadanou podmínkou (9) kružnice, kterou nazýváme Apolloniova kružnice bodů A a B určená poměrem λ.

Dodejme ještě, že z rovnosti (10), resp. (11), plyne, že čtveřice A, B, C, D bodů na přímce je harmonická, právě když body A a B představují středy dvou stejnolehlostí, ve kterých bod C přejde v bod D a které se liší znaménkem koeficientu. Poslední tvrzení zřejmě zůstane v platnosti i po záměně dvojice bodů A, B s dvojicí C, D (což je patrné ze zjednodušené verze obr. 2a, totiž z obr. 8, na kterém jsou vektory $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{DP}$ stejnolehlé podle středu B a vektory $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{DP}$ stejnolehlé podle středu A). Touto úvahou jsme podali druhé, tentokrát čistě geometrické ověření naší „optické“ konstrukce harmonické čtveřice bodů.



Obr. 8

Závěr

V tomto článku jsme objasnili souvislost harmonické čtveřice bodů s harmonickým průměrem čísel. To samo o sobě by nestačilo k zodpovězení otázky kladené v nadpisu našeho příspěvku, proto jsme stručně naznačili další (vcelku známé) souvislosti vedoucí až k hudební teorii, kde princip harmonie má své kořeny a prvotní místo.

Námi podaná „optická" konstrukce harmonické čtveřice ovšem není jediným známým způsobem, jak doplnit trojici kolineárních bodů na harmonickou čtveřici. K tomu lze využít četné geometrické situace, ve kterých se harmonické čtveřice bodů vyskytují. Jako příklad jsme uvedli její souvislost s Apolloniovou kružnicí, která sama je významným nástrojem k řešení řady geometrických úloh. Zároveň jsme naznačili alternativní metodu nalezení čtvrtého bodu harmonické čtveřice za pomoci dvou stejnolehlostí. Ta je sice rychlejší či geometricky praktičtější nežli námi nabízená cesta optického zobrazování, která však zůstává v těsném spojení s reálnými objekty a ději, čímž přesvědčivě demonstruje blízké souvislosti matematiky s fyzikou.

Literatura

[1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. (překlad Musilová J., Dub P., Obdržálek J. a kol.): *Fyzika.* VUTIUM a Prometheus, Brno, 2006.

[2] Deaux, R.: *Introduction to the Geometry of Complex Numbers.* Dover Publications, Inc., New York, 2008.

[3] Boháč, P.: *Základy geometrie komplexních čísel.* Rigorózní práce, MU, Brno, 2013. `http://is.muni.cz/th/269860/prif_r/rigo.pdf`.