Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 3, 58–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146591

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. prosince 2014* na adresu redakce.

Úloha 43. V nerovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC protne osa vnitřního úhlu při vrcholu C přeponu AB v bodě E a osa vnějšího úhlu u téhož vrcholu protne přímku AB v bodě F. Jak velké jsou vnitřní úhly trojúhelníku ABC, aby platilo

$$|AE| \cdot |AF| + |BE| \cdot |BF| = |EA| \cdot |EB| + |FA| \cdot |FB|\,?$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 44. *Těleso na vlákně*

Těleso o hmotnosti m je zavěšeno na vlákně délky d.

a) Těleso je v rovnovážné poloze stálé. Jak velkou rychlost $\boldsymbol{v}_0$ ve vodorovném směru mu musíme udělit, aby v nejvyšším bodě kruhové trajektorie tělesa byla výslednice sil působících na těleso nulová?

b) Jakou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ je v tomto případě napínáno vlákno, když těleso prochází rovnovážnou polohou?

Třecí sílu, hmotnost a prodloužení vlákna neuvažujeme. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 0{,}20$ m, $m = 0{,}50$ kg.

(*Josef Jírů*)

Řešení úloh z čísla 1/2014

Úloha 39. Je dán deltoid $ABCD$ s délkami stran $|AB| = |AD| = a$, $|BC| = |DC| = b$ a úhlopříčkami délek $|AC| = e$, $|BD| = f$, $e > f$, a je mu opsána kružnice. Dokažte, že platí:

$$2\left(a^4 + b^4\right) = e^2\left(2e^2 - f^2\right)$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Jelikož je deltoidu opsána kružnice, jsou úhly ABC a ADC pravé, a tudíž můžeme použít Pythagorovu větu

$$a^2 + b^2 = e^2. \tag{1}$$

Pro obsah deltoidu platí

$$\frac{ef}{2} = 2\,\frac{ab}{2}$$

neboli

$$ef = 2ab. \tag{2}$$

S využitím (1) a (2) platí

$$2\left(a^4 + b^4\right) = 2\left[\left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2\right] =$$

$$= 2\left(e^4 - \frac{e^2f^2}{2}\right) = 2e^4 - e^2f^2 = e^2\left(2e^2 - f^2\right).$$

Úloha 40. *Rozjíždějící se vlak*

Vlak byl vypraven přesně ve 12 h 00 min 00 s. U předního konce lokomotivy stál pozorovatel, jehož digitální hodinky mají trvalou odchylku od přesného času. Když jeho hodinky ukazovaly právě 12 h 00 min 00 s, začal kolem něj už projíždět předposlední vagón, který projel za 10,0 s. Poslední vagón minul pozorovatele za dobu 8,0 s. Vlak se pohyboval rovnoměrně zrychleně.

Stanovte, o kolik sekund ukazují pozorovatelovy hodinky méně, než je přesný čas.

Vagóny vlaku jsou stejně dlouhé, vzdálenost zadního konce vagónu od předního konce následujícího vagónu je zanedbatelná.

(*Ivo Volf*)

Autorské řešení:

Označme d délku vagónu, a stálé zrychlení vlaku, v rychlost vlaku v okamžiku, kdy pozorovatele začne míjet předposlední vagón. Dané veličiny označíme $t_1 = 10$ s, $t_2 = 8$ s. Máme stanovit dobu t, za kterou vlak dosáhl rychlosti v, neboť o tuto dobu ukazují pozorovatelovy hodinky méně, $t = \frac{v}{a}$.

Pro předposlední vagón platí

$$d = vt_1 + \frac{1}{2}at_1^2,$$

pro poslední vagón

$$d = (v + at_1)t_2 + \frac{1}{2}at_2^2.$$

Z těchto vztahů vyjádříme

$$v = a\frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)},$$

takže

$$t = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 31 \text{ s}.$$

Stav soutěže po 40 soutěžních úlohách

Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů, Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů, Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů, Martin Raszyk (G, Karviná) – 10 bodů, Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů, Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů, Jan Bien (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Vladimír Boček (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Stanislav Boula (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Matyáš Grof (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Jan Kučera (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů, Ondřej Motlíček (G Šumperk) – 10 bodů, Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů, Daniel Pišťák (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Marian Poljak (G, Přerov) – 10 bodů, Zuzana Procházková (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Michael Zelina (GChD Zborovská, Praha 5) – 10 bodů, Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů, David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů, Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu, Adam Láf (G Zborovská, Praha 5) – 7 bodů, Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů, Vilém Sklenář (GChD Zborovská, Praha 5) – 7 bodů, Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů, Veronika Hladíková (G Mikulášské nám., Plzeň) – 5 bodů, Mark Karpilovský