Dušan Jedinák

Listy z kalendára. Georg Cantor. Kurt Gödel

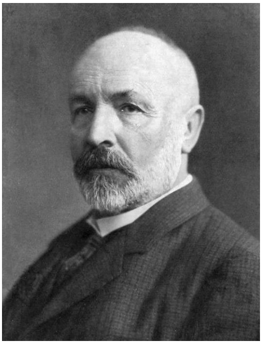
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 4, 30–32

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146547`

Listy z kalendára

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Georg CANTOR — (3. 3. 1845 – 6. 1. 1918)

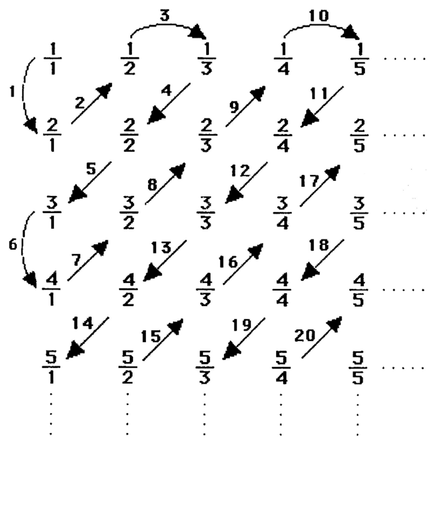


Našiel priradenie, pomocou ktorého bolo možné uznať, že počet bodov na úsečke je rovnaký, ako počet bodov vo štvorci, ktorý zostrojíme nad touto úsečkou. Sám si povedal: „Vidím to, ale neverím tomu.“ Aj ďalší matematici nechceli uveriť novým poznatkom pri dotyku s nekonečnom. Prirodzený „zákon a úsudok“ stratil pri nekonečných množinách svoju platnosť. Porovnanie nekonečných množín prinieslo prvé prekvapenie. A predsa sa teória množín, plná paradoxov, stala základným nástrojom pre zmocňovanie sa nekonečna ako pojmu, s ktorým sa dá úspešne pracovať. Ťažko skúšaným otcom týchto nečakaných predstáv sa stal nemecký matematik Georg Cantor.

Narodil sa v Petrohrade. Jeho otec pochádzal z Dánska, matka bola Nemka. Mladý Georg bol prvorodeným synom a už v základnej škole vynikal svojím nadaním. Otec chcel, aby bol lodným inžinierom. V roku 1856 sa presťahovali do Nemecka a usídlili sa vo Frankfurte nad Mohanom. Usilovný a pozorný Georg navštevoval priemyslovú školu v Darmstadte, túžil po štúdiu matematiky. Po smrti otca študoval na univerzite v Berlíne matematiku, fyziku a filozofiu. Počúval prednášky Weierstrassa, Kummera a Kroneckera. Začal sa zaujímať o teóriu čísiel a teóriu funkcií. Už pri obhajobe záverečnej práce (1867) vedel, že v matematike je dôležité umenie vedieť postaviť vhodnú otázku, než ju hneď aj vyriešiť. Stal sa učiteľom na strednej škole, bol docentom na univerzite v Halle (od 1869), kde pôsobil až do konca svojho života. Oženil sa (1874) s priateľkou svojej sestry a mali spolu 6 detí. Ako riadny vysokoškolský profesor (od 1879) aj napriek zdravotným ťažkostiam prednášal matematiku až do roku 1913. Zomrel v Halle.

Cantor študoval otázky konvergencie radov s hodnotami goniometrických funkcií. Prišiel na myšlienku porovnávať nekonečné množiny tým, že hľadal vzájomné jednoznačné zobrazenie medzi nimi. Vytušil, že podstata matematiky je v jej slobode: „Matematika je úplne slobodná vo svojom rozvoji a jej pojmy musia byť bezosporné a musia byť spojené s prv zavedenými pojmami prostredníctvom presných definícií.“ Novovytvorenú teóriu množín zverejnil (1878) v odbornom časopise pod názvom *Príspevok k teórii množín*. Tam je popísaná aj jeho diagonálna metóda. Výsledky vyšetrovania nekonečných množín sa stretli s nedôverou aj v radoch významných matematikov. Pre hodnotenie svojich prác Cantor nežiadal nestranné posúdenie: „Ja pre svoje práce vyžadujem zaujatosť, nie však pre svoju pominuteľnú osobu, ale zaujatosť pre pravdu, ktorá je večná.“ Dlho trvalo, kým uplatnenie naozaj netradičných postupov presvedčilo o svojom význame. Dnes vieme, že množinový spôsob nazerania ukázal cesty k ďalšiemu mohutnému rozvoju matematiky. Teória množín sa stala podstatnou zložkou nielen v základoch matematiky a filozofií nekonečna, podnietila záujem o štúdium metodologických otázok v matematike, ale zasiahla aj do jazyka a štýlu výkladu elementárnej matematiky.

Kladných racionálnych čísiel (napr. 1/2, 1/3, 2/5, ...) je toľko ako prirodzených čísiel. Pozrite sa na tabuľku. Určite sú tam všetky kladné zlomky, dokonca aj viackrát (lebo 4/2 = 2, 6/2 = 3 a pod.). Postupne preberieme všetky. To znamená, že ich je toľko ako prirodzených čísiel. Podivné, ale pri dotyku s nekonečnom je to možné. Všetkých reálnych čísiel je „podstatne viac“ ako prirodzených čísiel, nedajú sa očíslovať prirodzenými číslami.



Kurt GÖDEL — (28. 4. 1906 – 14. 1. 1978)

Vo vedeckej oblasti dosiahol najslávnejšie matematické výsledky 20. storočia. Jeho vety o neúplnosti formálnej teórie a nemožnosti dokázať bezospornosť formálnej teórie v rámci jej formalizmu, spôsobili zásadné zmeny nielen v logike, ale aj vo filozofii matematiky. Gödel dokázal, že každý logický systém obsahujúci formalizovanú rekurzívnu aritmetiku je buď sporný, alebo obsahuje nejakú nerozhodnuteľnú formulu. Dokázal, že axióma výberu je nezávislá od ostatných axióm teórie množín (1935–1940). Tiež ukázal, že hypotéza kontinua je bezosporná. Vyriešil Einsteinove rovnice gravitačného poľa (1949), publikoval tri odborné práce o problémoch relativistickej kozmológie.

Gödel ukázal, že neexistuje všeobecná efektívna metóda s konečným počtom operácií, aby sme mohli všetky formule považovať za dokázané. Matematicky presne môže byť dokázané, že v každom konzistentnom formálnom systéme, ktorý obsahuje určitú časť konečnej teórie čísiel, existujú nerozhodnuteľné aritmetické vety a konzistencia žiadneho takéhoto systému nemôže byť dokázaná v tomto systéme. Ak aj nenachádzame spor, to neznamená, že spor neexistuje. Gödel ukázal, že nie je možná úplná formalizácia nášho poznávania založená na dedukcii zo systému prijatých axióm. Ľudský duch bude asi vždy v reálnej skutočnosti nachádzať svojimi myšlienkovými predstavami také zložité štruktúry, že na ich usporiadanie nebudú úplne stačiť žiadne ním konštruované konečné matematicko-logické formuly alebo filozoficko-metodologické sústavy. Ukázalo sa, že bohatstvo matematických teórií nemožno úplne odhaliť axiomaticky. Systém logických formúl exaktnej matematickej teórie môže vystihnúť iba časť skutočného sveta, ktorý spoznávame ľudskou inteligenciou. Nerozhodnuteľnosť niektorých tvrdení nie je absolútna, ale je viazaná na príslušný systém axióm s danou logikou. Aj keď budeme naďalej skúmať základy matematiky, konštruovať nové systémy axióm i nové dôkazové metódy, ani formalizácia ani axiomatizácia nám však „kameň mudrcov“ neprinesú. Stále sa vytvárajúca neistota zostane neodstrániteľnou súčasťou aj v matematike.