Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 1, 56–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146517

NAŠE SOUTĚŽ

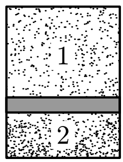
Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. června 2013* na adresu redakce.

Úloha 33. Určete počet všech pětimístných čísel tvaru $\overline{ab0ab}$, která jsou rovna součinu různých prvočísel. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 34. *Válec rozdělený pístem*
V uzavřeném válci se svislou osou odděluje hladký válcový píst od sebe dvě stejná látková množství téhož plynu (obr.). Při teplotě $T = 300$ K jsou objemy oddělených částí v poměru $V_1 : V_2 = 3 : 1$. Jaký bude poměr $V_1' : V_2'$ při teplotě $T' = 400$ K? (*Martin Kapoun*)



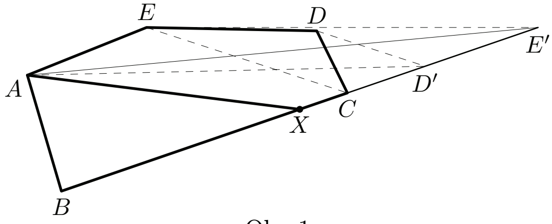
Řešení úloh z čísla 3/2012

Úloha 29. Je dán libovolný konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na jeho hranici najděte bod X tak, aby úsečka AX rozdělila pětiúhelník na dvě části se stejným obsahem. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení:

Bod X může ležet na jedné ze stran BC, CD, DE.

Nejprve vyzkoušíme, zda bod X neleží např. na straně BC. Sestrojíme bod D' jako průsečík přímky BC a přímky, která je rovnoběžná s přímkou EC a prochází bodem D (obr. 1).

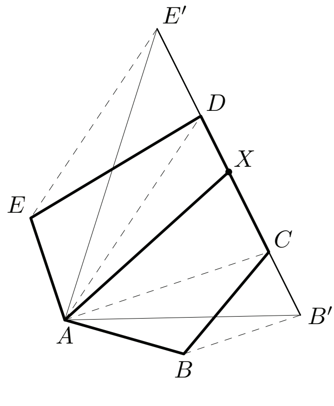


Obr. 1

V tom případě mají trojúhelníky ECD a ECD' stejný obsah, a tudíž čtyřúhelník $ABD'E$ má stejný obsah jako daný pětiúhelník $ABCDE$. Ještě sestrojíme bod E' jako průsečík přímky BC a přímky, která je rovnoběžná s přímkou AD' a prochází bodem E. V tom případě mají trojúhelníky $AD'E$ a $AD'E'$ stejný obsah, a tudíž trojúhelník ABE' má stejný obsah jako čtyřúhelník $ABD'E$, a tedy stejný obsah jako daný pětiúhelník $ABCDE$. Střed úsečky BE' a bod A rozdělí trojúhelník ABE' na dva trojúhelníky stejného obsahu. Leží-li střed úsečky BE' na úsečce BC, označíme ho X a platí, že obsah trojúhelníku ABX a obsah pětiúhelníku $XCDEA$, resp. čtyřúhelníku $XDEA$ (to tehdy, že $X = C$), jsou stejné.

Neleží-li střed úsečky BE' na straně BC, vyzkoušíme analogickým způsobem, zda neleží bod X na straně ED.

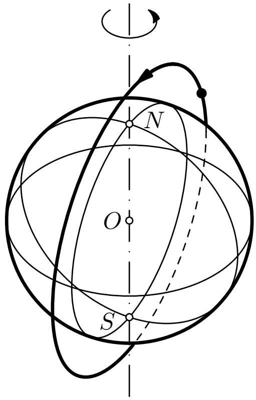
Pokud jsme nenašli bod X ani na straně BC ani na straně ED, najdeme ho na straně CD. Sestrojíme bod B' jako průsečík přímky CD a přímky, která je rovnoběžná s přímkou AC a prochází bodem B (obr. 2).



Obr. 2

V tom případě mají trojúhelníky ABC a $AB'C$ stejný obsah, a tudíž čtyřúhelník $AB'DE$ má stejný obsah jako daný pětiúhelník $ABCDE$. Ještě sestrojíme bod E' jako průsečík přímky CD a přímky, která je rovnoběžná s přímkou AD a prochází bodem E. V tom případě mají trojúhelníky ADE a ADE' stejný obsah, a tudíž trojúhelník $AB'E'$ má stejný obsah jako čtyřúhelník $AB'DE$, a tedy stejný obsah jako daný pětiúhelník $ABCDE$. Střed X úsečky $B'E'$ a bod A rozdělí trojúhelník $AB'E'$ na dva trojúhelníky stejného obsahu. Proto mají čtyřúhelníky $ABCX$ a $AXDE$ stejný obsah.

Úloha 30. Umělá družice Země Představte si, že se podařilo vypustit takovou umělou družici Země, která prolétá střídavě nad severním a jižním zeměpisným pólem (obr. 1). Poloměr oběžné trasy je 7 000 km, poloměr Země 6 370 km. Družici začneme sledovat v okamžiku, kdy prolétá nad severním zeměpisným pólem v čase 00:00:00 h směrem nultého poledníku. Hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24}$ kg, délka dne je 23 h 56 min 04 s.



Obr. 1: Pohyb družice

a) Zjistěte, zda z této družice je možno při jejím průletu nad jižním pólem vidět naráz celou Antarktidu.

b) Zjistěte zeměpisné polohy míst, nad kterými se nachází družice při třech po sobě následujících průletech nad rovníkem.

c) Podaří se vám stanovit zeměpisnou polohu místa, nad kterým družice prolétá přesně v čase 01:00:00 h? Na mapách GoogleEarth3D stanovte, kde toto místo leží. (*Ivo Volf*)

Řešení: Označme $r = 7\,000$ km, $R_z = 6\,370$ km, $M_z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $T_0 = 23$ h 56 min 04 s.

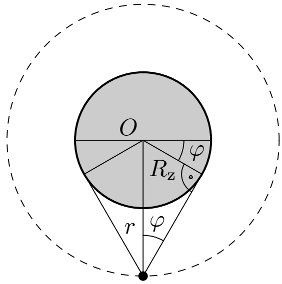
a) Podle obr. 2 platí $\sin\varphi = \frac{R_z}{r}$. Po dosazení $\sin\varphi = \frac{6\,370}{7\,000}$, z čehož $\varphi = 65{,}5°$. Z družice lze dohlédnout nejvýše do míst, odpovídajícím 65,5° jižní šířky. Pokud bychom se podívali do zeměpisného atlasu nebo na internetu na mapy GoogleEarth3D, zjistili bychom, že nejvzdálenější výběžek Antarktidy lze nalézt na 63° jižní šířky. Z toho vyplývá, že z této družice není možno vidět celou Antarktidu naráz.

b) Družice obíhá kolem Země kruhovou rychlostí o velikosti

$$v_k = \sqrt{\kappa \frac{M_z}{r}}.$$

Oběžná doba družice je pak dána vztahem

$$T = \frac{2\pi r}{v_k} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\kappa \frac{M_z}{r}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\kappa M_z}}.$$



Obr. 2: Družice nad Antarktidou

Než družice doletí od pólu k rovníku, uplyne doba $t_1 = \frac{T}{4}$. Za tuto dobu se Země pootočí o úhel

$$\alpha_1 = \omega t_1 = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi^2}{T_0} \cdot \sqrt{\frac{r^3}{\kappa M_z}}.$$

Pro dané hodnoty je

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{86\,164} \cdot \sqrt{\frac{(6\,370 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} \text{ rad} \doteq 0{,}092 \text{ rad} \doteq 5{,}3^\circ.$$

Po prvním průletu nad rovníkem se družice bude nacházet nad místem 5,3° západní délky.

K druhému průletu nad rovníkem dojde za dobu $t_2 = \frac{3}{4}T$, čemuž odpovídá úhel pootočení Země $\alpha_2 = 15{,}9^\circ$. Družice se tedy bude nacházet nad rovníkem nad místem 164,1° východní délky.

K třetímu průletu nad rovníkem dojde za dobu $t_3 = \frac{5}{4}T$, čemuž odpovídá úhel pootočení Země $\alpha_3 = 26{,}5^\circ$. Družice se tedy bude nacházet nad rovníkem nad místem 26,5° západní délky.

c) Dle zadání začneme pohyb družice měřit od doby jejího průletu nad severním zeměpisným pólem. Za dobu $t = 01{:}00{:}00$ h se Země pootočí o úhel

$$\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T_0} t = \frac{2\pi}{86\,164} \cdot 3\,600 \text{ rad} \doteq 0{,}26 \text{ rad} \doteq 15^\circ.$$

Družice za tuto dobu urazí vzdálenost

$$s = v_{\mathrm{k}}t = \sqrt{\kappa\frac{M_{\mathrm{z}}}{r}}t.$$

Tomu odpovídá úhlová dráha

$$\varphi = \frac{s}{r} = \sqrt{\kappa\frac{M_{\mathrm{z}}}{r^3}} = \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6\cdot 10^{24}}{(7\cdot 10^6)^3}}\ \mathrm{rad} \doteq 3{,}88\ \mathrm{rad} \doteq 223^\circ.$$

Družice se tedy bude nacházet nad místem o zeměpisných souřadnicích 165° východní délky a 47° jižní šířky, tedy někde nad Novým Zélandem.

Stav soutěže po 30 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 19 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (G Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod