Vlastimil Dlab

Srdce trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 1, 4–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146505

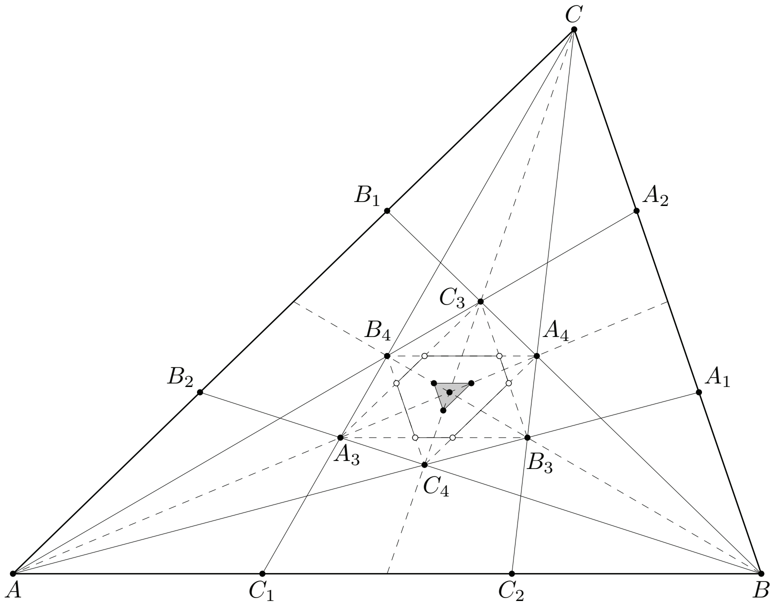
Srdce trojúhelníku

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. The article assigns, in a unique way, to every triangle a similar triangle placed inside it. Its area is equal to 1/400th of the area of the original triangle. The constructed triangle is called "the heart of a given triangle".

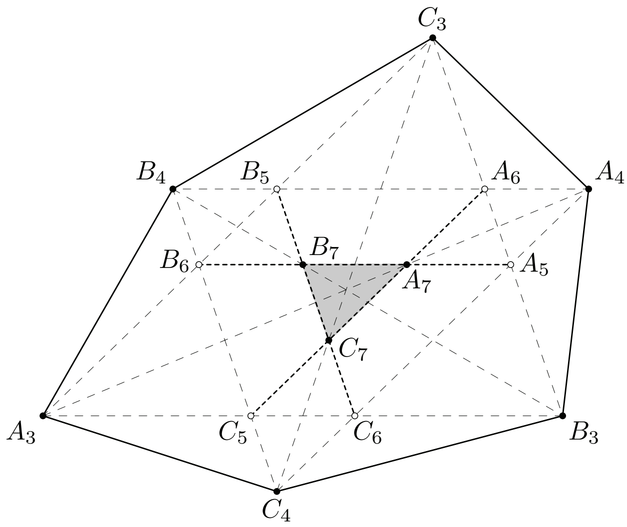
V tomto článku přiřadíme libovolnému trojúhelníku jednoznačným způsobem podobný trojúhelník, jehož obsah se rovná $\frac{1}{400}$ obsahu původního trojúhelníku. Budeme ho nazývat *srdce trojúhelníku*.

Konstrukce srdce spočívá v následujícím. Nechť ABC je daný trojúhelník. Rozdělme každou jeho stranu na tři sobě rovné díly a nazvěme definující body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ tak, jak je to naznačeno na obr. 1.



Obr. 1

Povšimněme si, že průsečíky úseček AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1 a CC_2 definují šestiúhelník. Označme jeho vrcholy A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4 a vyobrazme ho zvětšený na obr. 2.



Obr. 2

Průsečíky úhlopříček tohoto šestiúhelníku $A_3C_4B_3A_4C_3B_4$ označené v obr. 2 symboly A_5, A_6, B_5, B_6, C_5 a C_6 jsou vrcholy nového šestiúhelníku, který má následující vlastnosti:

$$B_5A_6 \parallel C_5C_6 \parallel AB, \quad C_5B_6 \parallel A_5A_6 \parallel BC, \quad A_5C_6 \parallel B_5B_6 \parallel CA.$$

Nyní úhlopříčky B_6A_5, C_6B_5 a A_6C_5, které jsou opět postupně rovnoběžné s AB, BC a CA, definují trojúhelník $A_7B_7C_7$, tzv. *srdce trojúhelníka ABC*. Všimněme si, že vrcholy srdce leží na těžnicích původního trojúhelníka ABC. Můžeme tedy formulovat následující tvrzení.

Věta *Srdce trojúhelníka je podobné původnímu trojúhelníku s koeficientem podobnosti $\frac{1}{20}$. Obsah srdce trojúhelníka je tedy $\frac{1}{400}$ obsahu původního trojúhelníku.*

Tvrzení vyplývá z rutinních výpočtů; můžeme použít jednoduchých prostředků analytické geometrie. Zvolíme-li kartézskou souřadnicovou soustavu tak, že $A = (0,0), B = (a,0)$ a $C = (b,c)$, obdržíme snadno souřadnice všech bodů, které jsou vyznačeny na obr. 1 a 2:

$$A_1 = (\tfrac{2a+b}{3}, \tfrac{c}{3}), \qquad B_1 = (\tfrac{2b}{3}, \tfrac{2c}{3}), \qquad C_1 = (\tfrac{a}{3}, 0),$$
$$A_2 = (\tfrac{a+2b}{3}, \tfrac{2c}{3}), \qquad B_2 = (\tfrac{b}{3}, \tfrac{c}{3}), \qquad C_2 = (\tfrac{2a}{3}, 0),$$

$$A_3 = \left(\tfrac{a+b}{4}, \tfrac{c}{4}\right), \qquad B_3 = \left(\tfrac{2a+b}{4}, \tfrac{c}{4}\right), \qquad C_3 = \left(\tfrac{a+2b}{4}, \tfrac{c}{2}\right),$$

$$A_4 = \left(\tfrac{2a+2b}{5}, \tfrac{2c}{5}\right), \qquad B_4 = \left(\tfrac{a+2b}{5}, \tfrac{2c}{5}\right), \qquad C_4 = \left(\tfrac{2a+b}{5}, \tfrac{c}{5}\right),$$

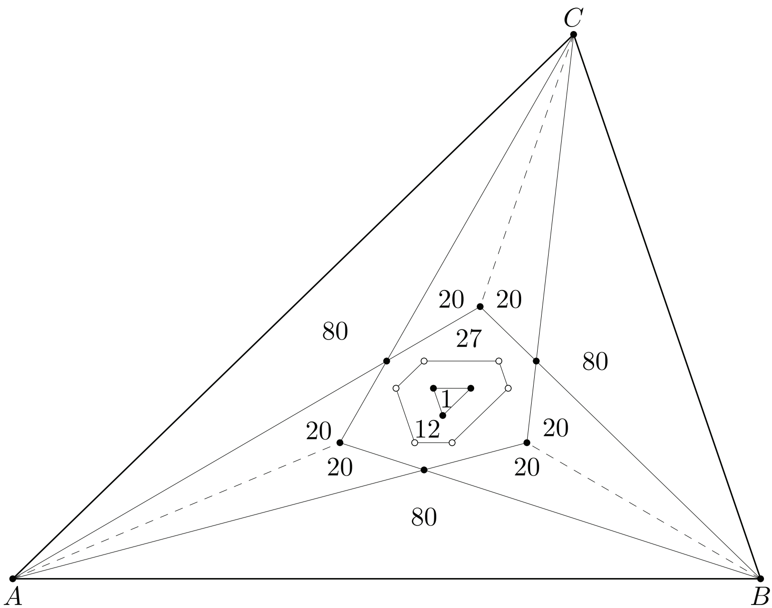
$$A_5 = \left(\tfrac{8a+7b}{20}, \tfrac{7c}{20}\right), \qquad B_5 = \left(\tfrac{5a+8b}{20}, \tfrac{2c}{5}\right), \qquad C_5 = \left(\tfrac{7a+5b}{20}, \tfrac{c}{4}\right),$$

$$A_6 = \left(\tfrac{7a+8b}{20}, \tfrac{2c}{5}\right), \qquad B_6 = \left(\tfrac{5a+7b}{20}, \tfrac{7c}{20}\right), \qquad C_6 = \left(\tfrac{8a+5b}{20}, \tfrac{c}{4}\right),$$

$$A_7 = \left(\tfrac{7a+7b}{20}, \tfrac{7c}{20}\right), \qquad B_7 = \left(\tfrac{6a+7b}{20}, \tfrac{7c}{20}\right), \qquad C_7 = \left(\tfrac{7a+6b}{20}, \tfrac{3c}{10}\right).$$

Odtud můžeme vypočítat obsahy všech jednotlivých částí trojúhelníku ABC a všech trojúhelníků a lichoběžníků tak, jak jsou podrobně vyznačeny na obr. 3 a 4. Číslo N vyznačené v každé části původního trojúhelníka udává obsah příslušné části, tj.

$$\frac{N}{400} \quad \text{obsahu původního trojúhelníka } ABC.$$



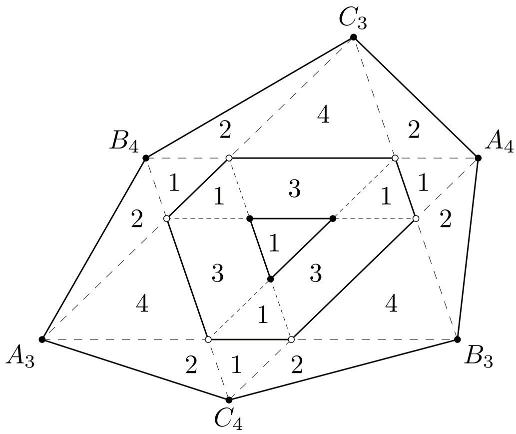
Obr. 3

Poznamenejme, že celá konstrukce může být výhodně popsána barycentrickými souřadnicemi, zvolíme-li

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1).$$

Potom dostaneme

$$
\begin{array}{lll}
A_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), & B_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}), & C_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\
A_4 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}), & B_4 = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}), & C_4 = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}), \\
A_5 = (\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{20}), & B_5 = (\frac{7}{20}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}), & C_5 = (\frac{2}{5}, \frac{7}{20}, \frac{1}{4}), \\
A_6 = (\frac{1}{4}, \frac{7}{20}, \frac{2}{5}), & B_6 = (\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{7}{20}), & C_6 = (\frac{7}{20}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}), \\
A_7 = (\frac{6}{20}, \frac{7}{20}, \frac{7}{20}), & B_7 = (\frac{7}{20}, \frac{6}{20}, \frac{7}{20}), & C_7 = (\frac{7}{20}, \frac{7}{20}, \frac{6}{20}).
\end{array}
$$



Obr. 4

Naskýtá se přirozená otázka: Proč dělíme strany trojúhelníku na tři stejné díly? Co se stane, rozdělíme-li každou stranu XY na tři části XU, UV a VY tak, že

$$|XU| = |VY| = k \cdot |XY|, \quad 0 < k < \tfrac{1}{2},$$

a provedeme stejnou konstrukci. Dostaneme trojúhelník, který můžeme nazvat *k-srdce trojúhelníku.* V tomto článku jsme podrobně popsali situaci, kdy $k = \frac{1}{3}$, a ukázali, že obsah $\frac{1}{3}$-srdce je $(\frac{1}{20})^2$ obsahu původního trojúhelníku.

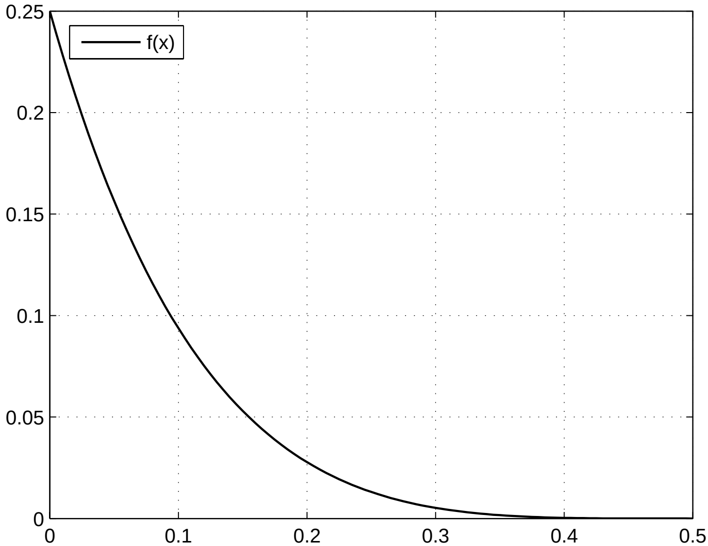
Podobným způsobem se můžeme přesvědčit, že obsah $\frac{1}{4}$-srdce je roven $\left(\frac{4}{35}\right)^2$ obsahu původního trojúhelníka. Plné uspokojení nám pak přinese poznání, že funkce f definovaná na otevřeném intervalu $(0, \frac{1}{2})$ pomocí vztahu

$$f(k) = \frac{\text{obsah } k\text{-srdce trojúhelníku } ABC}{\text{obsah trojúhelníku } ABC}$$

je dána jednoduchým výrazem

$$f(k) = \frac{(1-2k)^4}{(1+k)^2(2-k)^2}.$$

Na obr. 5 je její graf.



Obr. 5

Závěrečná historická poznámka

Trojúhelník má v elementární rovinné geometrii výsadní postavení. Ve své jednoduchosti přináší neobyčejně pestrou paletu zajímavých vlastností, z nichž mnohé svou důležitostí ovlivnily rozvoj matematiky. Trojúhelník hraje významnou roli už v Euklidových Základech [4]. Ty zaznamenávají řadu výsledků týkajících se vlastností různých přímek a jejich průsečíků definovaných v termínech trojúhelníku.

V historii matematiky a astronomie můžeme sledovat, jak jsou tyto výsledky rozvíjeny a užívány ve středověku v arabské vědě, poté v nebývalém rozvoji během renesance, a jaký zájem vzbuzují i v současnosti. Vzpomeňme zde alespoň několik překvapivých vlastností trojúhelníku, jako je Napoleonův trojúhelník, Fermatův–Toricelliho bod, Feuerbachova–Eulerova kružnice či Morleyho trojúhelník. O nich se můžeme snadno poučit z dostupných internetových zdrojů nebo z připravované učebnice [1]. Coxeterův důkaz věty Morleyho (viz [2]) přepsal do češtiny s nadšením F. Kuřina [6]. Zde uvedený článek navazuje právě na ideje věty Morleyovy a na článek [3].

L i t e r a t u r a

[1] Bečvář, J., Dlab, V.: *Od aritmetiky k algebře.* Matfyzpress, Praha, 2013 (připravuje se k vydání).

[2] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* New York, 1961.

[3] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky* **71** (2009), s. 169–182.

[4] Euclid of Alexandria: *Elementy.* České vydání. OPS, 2008–2012.

[5] Hejný, M, a kol.: *Teória vyučovania matematiky.* SPN, Bratislava, 1990.

[6] Kuřina, F.: Elegantní důkaz jedné krásné věty. *Učitel matematiky* **14**, s. 18–20.

* * * * *

Morleyova věta patří k nejhezčím výsledkům geometrie trojúhelníka. Byla objevena v roce 1904, publikována až v roce 1924:

V trojúhelníku ABC veďme vrcholem A přímky p_1, p_2 dělící úhel BAC na třetiny, vrcholem B přímky q_1, q_2 dělící na třetiny úhel CBA a vrcholem C přímky r_1, r_2 dělící na třetiny úhel ACB. Jejich označení volíme podle obrázku. Nechť X je průsečík přímek q_1 a r_2, Y průsečík přímek r_1 a p_2 a Z průsečík přímek p_1 a q_2. Potom body X, Y, Z tvoří rovnostranný trojúhelník.

(pozn. redakce)