Rozhledy matematicko-fyzikální

Martin Malý

Zajímavé kombinatorické identity

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 1, 1–3

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146502

Zajímavé kombinatorické identity

Martin Malý, Brno

Abstract. The paper introduces six combinatorial identities "hidden" in Pascal's triangle. The proofs of these identities are based on the definition of binomial coefficient.

Vyjděme z tabulky 1:

$\binom{0}{0}$		$\binom{1}{0}$		$\binom{2}{0}$		$\binom{3}{0}$		$\binom{4}{0}$
1	$\frac{1}{2}$	**2**	$\frac{2}{3}$	**3**	$\frac{3}{4}$	**4**	$\frac{4}{5}$	**5**
$\binom{1}{1}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{5}{1}$
1	$\frac{1}{3}$	**3**	$\frac{1}{2}$	**6**	$\frac{3}{5}$	**10**	$\frac{2}{3}$	**15**
$\binom{2}{2}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{6}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	**4**	$\frac{2}{5}$	**10**	$\frac{1}{2}$	**20**	$\frac{4}{7}$	**35**
$\binom{3}{3}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{6}{3}$		$\binom{7}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	**5**	$\frac{1}{3}$	**15**	$\frac{3}{7}$	**35**	$\frac{1}{2}$	**70**
$\binom{4}{4}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{6}{4}$		$\binom{7}{4}$		$\binom{8}{4}$

Tab. 1. Rovnoběžníkový výběr z prvních devíti řádků Pascalova trojúhelníku doplněný o zlomky ve významu podílu tvaru $\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k}$, kde $k \in \{1, \ldots, 4\}$, $n \in \{k, \ldots, k+3\}$.

Význam tabulky je zřejmý. Lze z ní vyčíst, že např.:

$$\binom{2}{2} : \binom{3}{2} + \binom{2}{1} : \binom{3}{1} = 1$$

$$\binom{4}{1} : \binom{5}{1} + \binom{4}{4} : \binom{5}{4} = 1$$

$$\binom{7}{4} : \binom{8}{4} + \binom{7}{4} : \binom{8}{4} = 1$$

Pokusme se pro uvedené tři rovnosti najít společný tvar. Vidíme, že na levé straně každé z nich lze levý sčítanec nahradit výrazem

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k}.$$

Zbývá zkusit najít „vhodný“ společný tvar pravých sčítanců, kterým je zřejmě výraz

$$\binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1}.$$

Dostáváme tak výraz

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} + \binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1},$$

od kterého se po porovnání s tabulkou 1 můžeme odvážit přejít k hypotéze o platnosti identity

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} + \binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1} = 1, \tag{1}$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Podobně dospějeme k hypotézám o dalších pěti identitách:

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} = \binom{(n+1)i-1}{k\,i} : \binom{(n+1)i}{k\,i}, \tag{2}$$

kde $k, n, i \in \mathbb{N}$, $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \binom{(n+1)i-1}{(k+1)i-1} : \binom{(n+1)i-1}{(k+1)i}, \tag{3}$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$, $n, i \in \mathbb{N}$, $k < n$,

$$\binom{n}{(n+1):2} : \binom{n+2}{(n+3):2} = \binom{n+1}{(n+1):2} : \binom{n+3}{(n+3):2}, \tag{4}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $2 \nmid n$,

$$\binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} = \binom{n}{n-k+2} - \binom{n+1}{n-k+2}, \tag{5}$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$, $1 < k \leq n$,

$$\binom{n}{(n+1):2} - \binom{n}{(n+3):2} = \binom{n+1}{(n+1):2} - \binom{n+1}{(n+3):2}, \tag{6}$$

kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $2 \nmid n$.

Na ukázku dokážeme identitu (1). Důkazy zbývajících pěti identit přenecháváme čtenáři k procvičení.

Důkaz. Buďte $k, n \in \mathrm{N}$, $k \leq n$, libovolná čísla. Pak

$$\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} + \binom{n}{n-k+1} : \binom{n+1}{n-k+1} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} +$$

$$+ \frac{n!}{(n-k+1)![n-(n-k+1)]!} : \frac{(n+1)!}{(n-k+1)![(n+1)-(n-k+1)]!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \cdot \frac{(n-k+1)!k!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{n-k+1}{n+1} + \frac{k}{n+1} = \frac{n-k+1+k}{n+1} = 1.$$

Tím je důkaz ukončen.

Literatura

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vyd., Prometheus, Praha, 2008.