Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 3, 57–60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146487`

NAŠE SOUTĚŽ

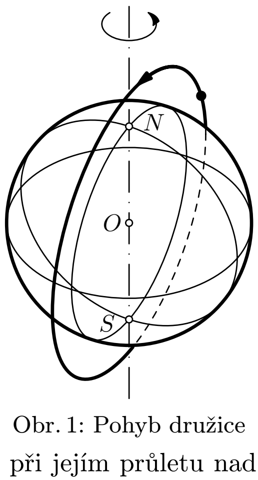
Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. prosince 2012* na adresu redakce.

Úloha 29. Je dán libovolný konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na jeho hranici najděte bod X tak, aby úsečka AX rozdělila pětiúhelník na dvě části se stejným obsahem. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 30. Umělá družice Země Představte si, že se podařilo vypustit takovou umělou družici Země, která prolétá střídavě nad severním a jižním zeměpisným pólem (obr. 1). Poloměr oběžné trasy je 7 000 km, poloměr Země 6 370 km. Družici začneme sledovat v okamžiku, kdy prolétá nad severním zeměpisným pólem v čase 00:00:00 h směrem nultého poledníku. Hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24}$ kg, délka dne je 23 hod 56 min 04 s.



Obr. 1: Pohyb družice

a) Zjistěte, zda z této družice je možno při jejím průletu nad jižním pólem vidět naráz celou Antarktidu.

b) Zjistěte zeměpisné polohy míst, nad kterými se nachází družice při třech po sobě následujících průletech nad rovníkem.

c) Podaří se vám stanovit zeměpisnou polohu místa, nad kterým družice prolétá přesně v čase 01:00:00 h? Na mapách GoogleEarth3D stanovte, kde toto místo leží. (*Ivo Volf*)

Řešení úloh z čísla 1/2012

Úloha 25. Určete všechna přirozená čísla n, pro která je

$$\sqrt{n-2012}+\sqrt{n+2012}$$

číslo celé. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení:

Číslo

$$\sqrt{n-2\,012}+\sqrt{n+2\,012}$$

má být celé. Dokážeme, že i obě čísla $\sqrt{n-2\,012}$ a $\sqrt{n+2\,012}$ musejí být celá.

Kdyby právě jedno z nich bylo racionální a druhé iracionální, byl by i jejich součet iracionální. Kdyby byla obě čísla iracionální a číslo $\sqrt{n-2\,012}+\sqrt{n+2\,012}$ racionální, bylo by i číslo

$$\sqrt{n+2\,012}+\sqrt{n-2\,012}-2\sqrt{n-2\,012}=\sqrt{n+2\,012}-\sqrt{n-2\,012}$$

iracionální. Pak by číslo

$$\left(\sqrt{n+2\,012}+\sqrt{n-2\,012}\right)\left(\sqrt{n+2\,012}-\sqrt{n-2\,012}\right)$$

bylo iracionální. Jelikož je ale

$$\left(\sqrt{n+2\,012}+\sqrt{n-2\,012}\right)\left(\sqrt{n+2\,012}-\sqrt{n-2\,012}\right)=4\,024,$$

docházíme ke sporu. Takže obě čísla $\sqrt{n-2\,012}$ a $\sqrt{n+2\,012}$ musejí být racionální.

Jelikož je dále odmocnina z přirozeného čísla jedině číslo celé nebo iracionální, musejí být i obě čísla $\sqrt{n-2\,012}$ a $\sqrt{n+2\,012}$ celá, a dokonce přirozená.

Nechť je tedy číslo $\sqrt{n-2\,012}=m$ přirozené. Pak je

$$n=m^2+2\,012,$$

$$n+2012=m^2+4\,024.$$

Toto číslo musí být také druhou mocninou nějakého přirozeného čísla l, takže

$$m^2 + 4\,024 = l^2,$$

odkud

$$(l-m)(l+m) = 4\,024 = 1 \cdot 4\,024 = 2 \cdot 2\,012 = 4 \cdot 1\,006 = 8 \cdot 503.$$

Rozebereme nyní možné případy:

1. $l - m = 1$ a $l + m = 4\,024$, odkud $2l = 4\,025$; levá strana poslední rovnosti je sudá, kdežto pravá strana lichá, takže tento případ nemá řešení;
2. $l - m = 2$ a $l + m = 2\,012$, odkud $2l = 2\,014$, $l = 1\,007$, $m = 1\,005$, $n = 1\,012\,037$; skutečně je

$$\sqrt{1\,012\,037 - 2012} + \sqrt{1\,012\,037 + 2012} = 2012;$$

3. $l - m = 4$ a $l + m = 1\,006$, odkud $2l = 1\,010$, $l = 505$, $m = 501$, $n = 253\,013$; skutečně je

$$\sqrt{253\,013 - 2012} + \sqrt{253\,013 + 2012} = 1006;$$

4. $l - m = 8$ a $l + m = 503$, odkud $2l = 511$; tento případ nemá řešení.

Řešením úlohy jsou tedy dvě čísla $n = 1\,012\,037$, nebo $n = 253\,013$.

Úloha 26. Na vodorovné rovině leží tři sněhové koule, z nichž má být postaven sněhulák. Největší koule má poloměr r_1, prostřední $r_2 = kr_1$ a nejmenší $r_3 = kr_2$. Koule jsou homogenní, hustota sněhu je u všech koulí stejná. Největší koule má hmotnost m_1. Určete

a) minimální práci nutnou k postavení sněhuláka,

b) výšku těžiště sněhuláka nad vodorovnou rovinou.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $k = 0{,}75$. (*Josef Jírů*)

Řešení:

a) Hmotnost prostřední koule je

$$m_2 = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi (kr_1)^3.$$

Jelikož $m_1 = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3$, platí $m_2 = k^3 m_1$. Podobně hmotnost nejmenší koule je $m_3 = k^3 m_2 = k^6 m_1$. K postavení sněhuláka je nutné zvednout prostřední kouli o výšku $2r_1$ a nejmenší kouli o výšku $2r_1 + 2r_2$. Hledaná práce tedy je

$$W = m_2 g \cdot 2r_1 + m_3 g \cdot (2r_1 + 2r_2).$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$W = k^3 m_1 g \cdot 2r_1 + k^6 m_1 g \cdot (2r_1 + 2kr_1) = 2\left(k^3 + k^6 + k^7\right) m_1 g r_1.$$

Pro číselné hodnoty je

$$W = 1{,}47\, m_1 g r_1.$$

b) Zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa souměrnosti sněhuláka byla totožná se svislou osou y a počátek se nacházel v nejnižším bodě sněhuláka. Dále zvolme za osu otáčení vodorovnou přímku procházející počátkem. Podle momentové věty pak platí

$$(m_1 + m_2 + m_3) g y_\mathrm{T} = m_1 g r_1 + m_2 g(2r_1 + r_2) + m_3 g(2r_1 + 2r_2 + r_3),$$

kde y_T je svislá souřadnice těžiště sněhuláka. Po dosazení dostaneme

$$m_1\left(1 + k^3 + k^6\right) g y_\mathrm{T} =$$
$$= m_1 g r_1 + k^3 m_1 g r_1 (2 + k) + k^6 m_1 g r_1 \left(2 + 2k + k^2\right),$$

z čehož

$$y_\mathrm{T} = \frac{1 + 2k^3 + k^4 + 2k^6 + 2k^7 + k^8}{1 + k^3 + k^6} r_1.$$

Pro číselné hodnoty je

$$y_\mathrm{T} = 1{,}80\, r_1.$$

Stav soutěže po 26 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů,
Michal Řepík (PedF UK, Praha) – 12 bodů,
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 7 bodů,
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Libor Drozdek (G Holešov) – 4 body