Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Dají se výrazy $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ zjednodušit?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 3, 26–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146482

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2012

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Dají se výrazy $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ zjednodušit?

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The proof of the theorem about square roots of expression $a \pm \sqrt{b}$ is given. Then, the theorem is used in many examples.

V některých sbírkách příkladů, v nichž se procvičuje počítání s odmocninami, se vyskytují úlohy typu:

Dokažte, že platí:

$$\sqrt{7+\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{43}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{43}}{2}}$$

$$\sqrt{9-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{76}}{2}} - \sqrt{\frac{9-\sqrt{76}}{2}}$$

Proveďme krátce důkaz první rovnosti. Obě strany dokazované rovnosti jsou kladné, takže je ekvivalentně umocníme na druhou:

$$\sqrt{7+\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{43}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{43}}{2}}$$

$$7+\sqrt{6} = \frac{7+\sqrt{43}}{2} + 2\sqrt{\frac{7+\sqrt{43}}{2}\cdot\frac{7-\sqrt{43}}{2}} + \frac{7-\sqrt{43}}{2}$$

$$7+\sqrt{6} = 7 + 2\sqrt{\frac{49-43}{4}}$$

$$7+\sqrt{6} = 7+\sqrt{6}$$

Kromě důkazu je užitečné přijít na to, odkud „se vzala“ čísla 43 a 76, která v obou rovnostech vystupují. Všimneme-li si toho, že je

$$7^2 - 6 = 43 \quad \text{a} \quad 9^2 - 5 = 76,$$

můžeme vytvořit další podobné rovnosti. Použijeme-li například vztahy

$$11^2 - 10 = 111 \quad \text{a} \quad 8^2 - 51 = 13,$$

snadno ověříme, že platí

$$\sqrt{11+\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{111}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{111}}{2}},$$

$$\sqrt{8-\sqrt{51}} = \sqrt{\frac{8+\sqrt{13}}{2}} + \sqrt{\frac{8-\sqrt{13}}{2}}.$$

Jestliže tento postup, který umožňuje vyjádřit výrazy $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ ve tvaru součtu, zobecníme, dostaneme větu:

Pro všechna kladná čísla a, b taková, že $a^2 > b$, platí

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

K jejímu důkazu označíme

$$x = \sqrt{a+\sqrt{b}}, \qquad y = \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

a vypočteme

$$(x+y)^2 = 2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right) = 4\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},$$

$$(x-y)^2 = 2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right) = 4\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Po odmocnění (s ohledem na to, že čísla $x+y$, $x-y$ jsou kladná) dostaneme

$$x+y = 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}, \qquad x-y = 2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

odkud plyne

$$x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

$$y = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

a protože $x = \sqrt{a + \sqrt{b}}$, $y = \sqrt{a - \sqrt{b}}$, je důkaz věty dokončen.

Tato věta se obvykle používá ke zjednodušení odmocnin z výrazů $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, $\sqrt{a - \sqrt{b}}$, je-li $a^2 - b$ druhá mocnina přirozeného čísla. Např.:

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 + \sqrt{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 4}{2}} + \sqrt{\frac{6 - 4}{2}} = \sqrt{5} + 1$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{9 - \sqrt{32}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 32}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 32}}{2}} = 2\sqrt{2} - 1$$

V následující ukázce postupnými úpravami zjednodušíme výraz

$$2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}.$$

Nejprve upravíme

$$\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{121}}{2}} + \sqrt{\frac{13 - \sqrt{121}}{2}} = \sqrt{12} + 1$$

a po další úpravě

$$\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}} = \sqrt{5 - (1 + \sqrt{12})} = \sqrt{4 - \sqrt{12}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2}} - \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2}} = \sqrt{3} - 1$$

dostáváme výsledek

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} = 2\sqrt{3+(\sqrt{3}-1)} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Na závěr pro zajímavost ukážeme, že větu, kterou jsme dokázali výše, je možno použít k málo obvyklému vyjádření přirozených čísel. Přesvědčte se například, že platí

$$1 = \sqrt{2-1} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}},$$

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{90+\sqrt{100}} =$$

$$= \sqrt{\frac{90+\sqrt{90^2-100}}{2}} + \sqrt{\frac{90-\sqrt{90^2-100}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{90+\sqrt{8\,000}}{2}} + \sqrt{\frac{90-\sqrt{8\,000}}{2}} = \sqrt{\frac{90+40\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{90-40\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \sqrt{45+20\sqrt{5}} + \sqrt{45-20\sqrt{5}}.$$

Pokud máte zájem, můžete si podobných příkladů utvořit celou řadu. Tyto ukázky jsou také odpovědí na otázku, „odkud se berou" důkazové úlohy podobné těm, které jsou v úvodu tohoto článku.

Poznámka: Výrazy typu $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ se nazývají *surdické* výrazy.

Literatura

[1] Hrubý, D.: Surdické výrazy. *Učitel matematiky* **7**, 1 (29) (1998), s. 9–13.

[2] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 1998, s. 75.

[3] Trávníček, S.: O jistých složených iracionalitách. *Matematika–fyzika–informatika* **17**, 2 (2007/08), s. 65–70.