Úlohy domácího kola 62. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 1, 39–41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146457`

Úlohy domácího kola 62. ročníku Matematické olympiády pro žáky středních škol

Kategorie A

1. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které existuje přirozené číslo a takové, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(Ján Mazák, Róbert Tóth)

2. Dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}a^2$. *(Tomáš Jurík)*

3. Označme $p(n)$ počet všech n-místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \le p(n) \le 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(Pavel Novotný)

4. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(Pavel Calábek)

5. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(Jaroslav Švrček)

6. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

Kategorie B

1. Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Případné iracionální kořeny zapište v jednoduchém tvaru bez odmocnin iracionálních čísel.

(*Jaromír Šimša*)

3. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici.

(*Jaroslav Švrček*)

4. Najděte nejmenší hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2. (*Vojtech Bálint*)

5. V rovině je dána úsečka AB. Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osové souměrnosti podle přímky XB, resp. XA. Najděte všechny takové body X, které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. (*Pavel Calábek*)

6. Je dáno přirozené číslo $k < 12$. Ve vrcholech pravidelného 12úhelníku jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 12$ (jako na ciferníku hodin). V jednom kroku můžeme buď vyměnit některá dvě protilehlá čísla, nebo zvolit libovolných k sousedních vrcholů a v nich napsaná čísla zvětšit o 1. Jako $T(k)$ označme tvrzení, že po konečném počtu kroků lze dostat všech 12 čísel stejných. Dokažte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodněte o platnosti $T(3)$. (*Ján Mazák*)

Kategorie C

1. Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (to jest žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Cestou rozumíme posloupnost políček, na která kobylka doskočí.) (*Peter Novotný*)

2. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí $a+b = c+d$, $ad = bc$, $ac+bd = 1$. Jakou největší hodnotu může mít součet $a+b+c+d$? (*Ján Mazák*)

3. Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o. V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$. (*Tomáš Jurík*)

4. Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku. (*Jaromír Šimša*)

5. Určete všechna celá čísla n, pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. (*Jaroslav Švrček*)

6. Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem 30 cm^2 je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě 3 cm^2 a 2 cm^2. Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM. (*Pavel Leischner*)