Ivo Volf

Nebezpečné zimní sporty

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 1, 14–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146453

FYZIKA

Nebezpečné zimní sporty

Ivo Volf, PřF UHK, Hradec Králové

Miroslava Jarešová, SŠPST a VOŠ, Chrudim

Abstract. The article is motivated by a fatal accident during the luge competition at the Vancouver 2010 Winter Olympics Games. It features several model situations based on the movement on ice and snow: skiing motion, sleighing, riders on the skeleton. In each model situation, the final speed achieved is determined.

Úvod

Před dvěma roky, 12. února 2010, několik hodin před zahájením zimních olympijských her, zemřel při tréningu na závodní dráze mladý gruzínský sáňkař Nodar Kumaritašvili; při vysoké rychlosti vyletěl z dráhy. Jeho nečekaná smrt vyvolala bouřlivou diskusi o bezpečnosti sportů. Fyzika a její metody dokážou odvodit, jaké maximální rychlosti dosahují sportovci při sjezdovém lyžování a při dalších zimních sportech. K výpočtu je třeba vypracovat matematické modely. Ukažme si některé z nich.

Sjezdové lyžování

Představme si, že lyžař sjíždí po dlouhém svahu po přímé trati, přičemž svah svírá s vodorovnou rovinou stálý úhel α. Na trati se jeho nadmořská výška sníží z hodnoty $h_1 = 1\,480$ m na $h_2 = 1\,120$ m, přičemž lyžař urazí dráhu $s = 1\,800$ m. Hmotnost lyžaře i s lyžemi je $m = 80$ kg. Chtěli bychom odhadnout velikost rychlosti sjezdaře na konci svahu.

Model 1

Jízda lyžaře probíhá za ideálních podmínek, kdy nebudeme uvažovat ani odpor prostředí ani třecí sílu.

K řešení použijeme zákon o zachování mechanické energie. Budeme uvažovat, že sjezdař je na začátku v klidu, na konci má rychlost v_1. Nulovou hladinu polohové energie umístíme na konci svahu. Změna pohybové energie $\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_1^2$ je rovna změně polohové energie $\Delta E_\mathrm{p} = mg\Delta h$, tj.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(h_1 - h_2),$$

z čehož

$$v_1 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 360}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 85\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 306\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Uvedená rychlost výrazně odporuje realitě, kdy závodníci projíždějí trasu přibližně za 60 s, tj. průměrnou rychlostí

$$v_{\mathrm{p1}} = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 108\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Model 2

V tomto modelu budeme uvažovat, že mezi skluznicemi lyží a svahem působí třecí síla. Součinitel smykového tření zvolme $f = 0{,}05$. Další odpory zatím nebudeme uvažovat.

Pohyb lyžaře je v tomto případě opět rovnoměrně zrychlený pohyb na nakloněné rovině. Zatímco v předchozím případě se lyžař pohyboval se zrychlením $a = g \sin\alpha$, v tomto případě v důsledku působení třecí síly se pohybuje se zrychlením

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Rychlost lyžaře na konci svahu je pak dána vztahem

$$v_2 = \sqrt{2as} = \sqrt{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)s}.$$

Pro úhel sklonu svahu α dále platí vztahy

$$\sin\alpha = \frac{h_1 - h_2}{s}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{s}\sqrt{s^2 - (h_1 - h_2)^2}.$$

Po dosazení do vztahu pro v_2 dostaneme

$$v_2 = \sqrt{2g\left[h_1 - h_2 - f\sqrt{s^2 - (h_1 - h_2)^2}\right]}.$$

Pro dané hodnoty pak obdržíme

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot [360 - 0{,}05 \cdot \sqrt{1\,800^2 - 360^2}]}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx$$
$$\approx 74\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 266\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Ani tento odhad ještě není reálný. Model je třeba dále zpřesňovat.

Model 3

Budeme uvažovat odpor prostředí pro případ pohybu ve vzduchu, zatím bez smykového tření. Odporová síla vzduchu je dána tzv. *Newtonovým vzorcem* $F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}C\varrho S v^2 = kv^2$. K použití tohoto vzorce je třeba ještě doplnit další údaje: tvarový součinitel $C = 0{,}7$, obsah příčného řezu $S = 1{,}1\ \mathrm{m}^2$. Dále budeme uvažovat, že ke sjezdu dochází při teplotě $-10\ ^\circ\mathrm{C}$. Hustota vzduchu je při této teplotě $\varrho = 1{,}32\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Potom můžeme odhadnout hodnotu k v Newtonově vzorci:

$$\{k\} = \left\{\frac{1}{2}C\varrho S\right\} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}7\cdot 1{,}32\cdot 1{,}1 \approx 0{,}51$$

Pohybová rovnice je pak rovna

$$ma = mg\sin\alpha - kv^2.$$

Pohyb lyžaře je zpočátku zrychlený, s rostoucí rychlostí pohybu však zrychlení pohybu klesá, až při určité velikosti rychlosti v_3 se pohyb stane rovnoměrným, tj. $a = 0$. Velikost mezní rychlosti v_3 určíme ze vztahu

$$mg\sin\alpha - kv_3^2 = 0,$$

z čehož

$$v_3 = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}} = \sqrt{\frac{mg(h_1 - h_2)}{ks}}.$$

Pro dané hodnoty je

$$v_3 = \sqrt{\frac{80\cdot 10\cdot 360}{0{,}51\cdot 1\,800}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 65\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Tento odhad se již mnohem více blíží skutečnosti.

Poznámka: Výpočet mezní rychlosti u modelů, jak jsme ho provedli teď a budeme provádět i nadále, je zkrácený model, který vychází z mezního stavu, kdy velikost zrychlení $a = 0$. Při přesnějším odvození, které je výsledkem řešení diferenciální rovnice, této mezní rychlosti těleso dosáhne až za nekonečně dlouhou dobu.

Na závěr této úlohy zkusme ještě popsat situaci, budeme-li uvažovat obě síly zároveň: tedy jak třecí sílu mezi svahem a skluznicemi lyží, tak i odporovou sílu vzduchu.

Model 4

V tomto případě je pohybová rovnice dána vztahem

$$ma = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - kv^2.$$

Při ustáleném pohybu je $a = 0$, a tedy pro mezní rychlost v_4 platí

$$mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - kv_4^2 = 0,$$

z čehož velikost mezní rychlosti

$$v_4 = \sqrt{\frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{k}} = \sqrt{\frac{mg(h_1 - h_2) - mgf\sqrt{s^2 - (h_1 - h_2)^2}}{ks}}.$$

Pro dané hodnoty:

$$v_4 = \sqrt{\frac{80 \cdot 10 \cdot 360 - 80 \cdot 10 \cdot 0{,}05\sqrt{1\,800^2 - 360^2}}{0{,}51 \cdot 1\,800}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

V tomto posledním odhadu jsme se ještě více přiblížili skutečnosti. Je zde vidět velký vliv odporové síly vzduchu, který se v praxi snažíme u sjezdařů co nejvíce zmenšit jejich oblečením, popř. vhodnou technikou jízdy (lyžaři jezdí skloněni) co nejvíce zmenšit hodnotu součinitele k. Důležité je také si uvědomit, že hodnota součinitele k se také mění s teplotou vzduchu (protože i hustota vzduchu závisí na teplotě), takže za různých teplot (při jinak nezměněných ostatních vlivech) je možno dosahovat různých výsledků.

Zimní sporty „v korytu“

Skupina sportů, mezi něž patří bobování, jízda na sáňkách a na skeletonu, je známá tím, že sportovci dosahují vyšších rychlostí než při lyžování, i když spád trati je menší (asi 10%).

Jízda na skeletonu

Nejezdí se na přímé trati, nýbrž na poměrně krátké dráze, kde je umístěno 16 zatáček (pro muže). S ohledem na větší rychlost pohybu je celá trasa umístěna v tvarovaném korytu. Hmotnost sportovce se skeletonem je 110 kg. Určete mezní rychlost při teplotě $-10\ ^\circ\mathrm{C}$, uvažujeme-li pouze odpor vzduchu. Spád trati (sinus úhlu sklonu svahu) je $p = 0{,}10$.

Obr. 1: Skeleton [4]

Model 5

Napíšeme pohybovou rovnici. Platí

$$ma = mgp - kv^2,$$

kde

$$k = \frac{1}{2}CS\varrho = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}32\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}} \approx 0{,}21\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}.$$

Mezní rychlosti o velikosti v_5 sportovec dosáhne, bude-li velikost zrychlení pohybu $a = 0$. Potom $mgp - kv_5^2 = 0$, z čehož

$$v_5 = \sqrt{\frac{mgp}{k}} = \sqrt{\frac{110 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{0{,}21}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 23\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 83\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Získaná rychlost odpovídá realitě, ovšem ve skutečnosti je o něco menší. Je to z toho důvodu, že zde ještě působí třecí síla smykového tření mezi skeletonem a tratí.

Model 6

Odhadněme hodnotu součinitele smykového tření mezi skeletonem a tratí na 0,03. Pohybovou rovnici pak můžeme napsat obdobně jako v modelu 4 ve tvaru

$$ma = mgp - mgf\sqrt{1 - p^2} - kv^2.$$

Položíme-li $a = 0$ a vyjádříme-li velikost mezní rychlosti v_6, dostaneme

$$v_6 = \sqrt{\frac{mg\left(p - f\sqrt{1-p^2}\right)}{k}} =$$

$$= \sqrt{\frac{110 \cdot 10 \cdot \left(0{,}1 - 0{,}03 \cdot \sqrt{1-0{,}1^2}\right)}{0{,}21}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 19\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 68\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Jízda sáňkaře

Obr. 2: Sáňkař [2]

Model 7

Vraťme se ještě k případu gruzínského sáňkaře. Závody se konaly nedaleko Vancouveru v horském středisku Whistler Sliding Centre (obr. 3).

Obr. 3: Whistler Sliding Centre [5]

Trasa má délku 1 450 m a výškový rozdíl 152 m. Pro jízdu odhadneme $C = 0{,}40$, $S = 0{,}3\ \mathrm{m}^2$. Hustota vzduchu při teplotě $-10\ °\mathrm{C}$ je $\varrho = 1{,}32\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Potom

$$k = \frac{1}{2} CS\varrho \approx 0{,}08\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}.$$

Budeme uvažovat, že hmotnost sportovce se sáňkami je 110 kg. Mezní rychlost v_7 sáňkaře odhadneme obdobně jako v modelu 4, tj.

$$v_7 = \sqrt{\frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{k}} = \sqrt{\frac{mg(h_1 - h_2) - mgf\sqrt{s^2 - (h_1 - h_2)^2}}{ks}}.$$

Pro dané hodnoty:

$$v_7 = \sqrt{\frac{110 \cdot 10 \cdot 152 - 110 \cdot 10 \cdot 0{,}03\sqrt{1\,450^2 - 152^2}}{0{,}08 \cdot 1\,450}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx$$

$$\approx 32\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 115\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Poznámka: Pokud by se sáňkař pohyboval rychlostí $32\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, potom v zatáčce o poloměru $r = 40$ m by na něj působila setrvačná odstředivá síla o velikosti

$$F_{\mathrm{od}} = \frac{mv_7^2}{r} = \frac{110 \cdot 32^2}{40}\ \mathrm{N} \approx 2\,816\ \mathrm{N},$$

čemuž odpovídá odstředivé zrychlení

$$a_{\mathrm{od}} = \frac{v_7^2}{r} \approx 26\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Proti této odstředivé síle působí třecí síla smykového tření, jejíž velikost odhadneme na

$$F_{\mathrm{t}} = mgf = 110 \cdot 10 \cdot 0{,}03\ \mathrm{N} = 33\ \mathrm{N}.$$

Z výsledku je zřejmé, že velikost třecí síly je vzhledem k velikosti odstředivé síly zanedbatelná. Proto musí sáňkaři jezdit ve dráze, která je tvořena korytem. Odhadovaná rychlost sáňkaře uváděná v předloňském tisku byla v mezích 130 až 140 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Pokud bychom označili úhel sklonu koryta s vodorovnou rovinou β, potom

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_7^2}{rg} = \frac{32^2}{40 \cdot 10} = 2{,}56.$$

Při výše uvedené úvaze je však třeba si uvědomit, že úhel sklonu β se pro ideální stav navrhuje tak, aby výslednice síly tíhové a odstředivé směřovala kolmo k rovině dráhy, z čehož vyplývá výše uvedený vztah pro $\operatorname{tg}\beta$. V místě, kde sáňky projíždějí rychlostí 120 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, je úhel sklonu koryta $\beta \approx 70°$.

Závěr

Při zimních sportech, zejména na velmi hladké trase, dosahují sportovci (bob, sáňky, skeleton) značných rychlostí. V zatáčkách a při náhlém zastavení (náraz na stěnu apod.) vznikají velké setrvačné síly, v jejichž důsledku mohou nastat velké úrazy.

Literatura

[1] Mikulčák, J. a kol.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky.* 4. vyd., Prometheus, Praha, 2009.

[2] Český sáňkař: Gruzíncova tragédie? Nevyježděnost. [online] `www.tyden.cz/rubriky/sport/vancouver-2010/` [cit. 13. 2. 2010].

[3] Sjezdař na lyžích. [online] `abc.blesk.cz/clanek/3d-modely/9644/sjezdar-na-lyzich.html` [cit. 11. 1. 2010].

[4] Williams leads, Pikus-Pace in skeleton medal hunt. [online] `http://wintergames.ap.org/story.aspx` [cit. 18. 2. 2010].

[5] CAN: Whistler Olympic Venues. [online] `http://www.life.com` [cit. 17. 10. 2009].