Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 4, 57–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146447

NAŠE SOUTĚŽ

V předchozích dvou ročnících Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

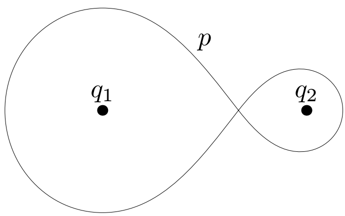
V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *29. února 2012* na adresu redakce.

Úloha 23. Pravoúhlému trojúhelníku ABC je vepsána kružnice, která se dotýká odvěsny AC v bodě M a odvěsny BC v bodě L. Úsečku AM otočíme kolem bodu A do polohy AQ kolmé k AB a analogicky otočíme úsečku BL kolem bodu B do polohy BP kolmé k AB, přičemž body C, P, Q leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB. Dokažte, že bod C leží na úsečce PQ, právě když $|AQ| = |BP|$. (*Jaroslav Zhouf*)

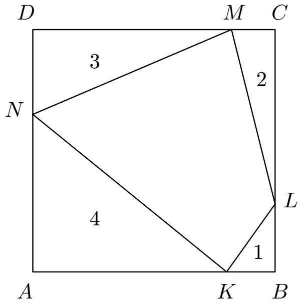
Úloha 22. *Dva bodové náboje.* Ve všech bodech křivky p na obrázku je potenciál elektrického pole vytvořeného dvěma bodovými náboji $q_1 = 4$ nC a $q_2 = 1$ nC ve vakuu roven $\varphi = 900$ V. Určete vzdálenost nábojů l. Konstanta Coulombova zákona $k = 9 \cdot 10^9$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ C^{-2}.



(*Přemysl Šedivý, námět úlohy je převzat z Moskevské olympiády*)

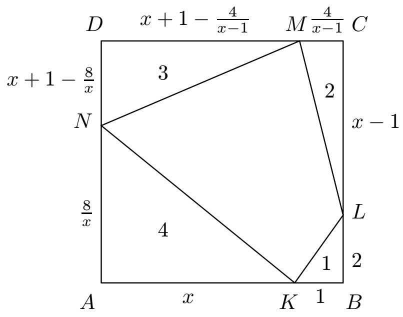
Řešení úloh z čísla 2/2011

Úloha 19. Do čtverce $ABCD$ je vepsán čtyřúhelník $KLMN$ podle obrázku. Určete v centimetrech délku a strany čtverce $ABCD$, jestliže $|KB| = 1$ cm a obsahy trojúhelníků KBL, LCM, MDN, NAK jsou po řadě 1 cm^2, 2 cm^2, 3 cm^2, 4 cm^2.



(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Udělejme označení podle obr. 1, kde údaje jsou délky úseků v centimetrech.



Obr. 1

Vyjdeme od označení úseků KB a AK strany AB čtverce a postupně vyjadřujeme pomocí známých hodnot obsahů trojúhelníků další úseky. Pro obsah trojúhelníku MND pak platí

$$\left(x+1-\frac{8}{x}\right)\left(x+1-\frac{4}{x-1}\right)=6.$$

Postupnými ekvivalentními úpravami dostaneme

$$x^2 + x - \frac{4x}{x-1} + x + 1 - \frac{4}{x-1} - 8 - \frac{8}{x} + - \frac{32}{x(x-1)} - 6,$$

$$x^4 + x^3 - 19x^2 + x + 40 = 0,$$

$$\left(x^2 - 2x - 5\right)\left(x^2 + 3x - 8\right) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}, \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Z těchto čtyř možných hodnot je nutné vyloučit záporné hodnoty $1 - \sqrt{6}$, $(-3 - \sqrt{41})/2$, které tudíž nemohou být délkami úseček. Navíc je ještě nutné ověřit, zda je $(x+1)^2 > 10$, kde 10 cm^2 je součet obsahů čtyř rohových trojúhelníků:

$$\left[\left(1 + \sqrt{6}\right) + 1\right]^2 = \left(2 + \sqrt{6}\right)^2 = 10 + 4\sqrt{6} > 10$$

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{41}}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{41}}{2}\right)^2 = \frac{42 - 2\sqrt{41}}{4} = \frac{21 - \sqrt{41}}{2} < 10$$

Délka strany čtverce je tedy $a = 2 + \sqrt{6}$ cm.

Úloha 20. *Snímání povrchu Země.*
V současné době jste již určitě všichni slyšeli o navigačním systému GPS (*G*lobální *P*olohový *S*ystém). To, že funguje a že ho můžeme používat, zajišťuje 24 satelitů obíhajících kolem Země. Hmotnost jedné družice GPS je $m = 1{,}8$ tuny, tato družice obletí Zemi za 11 hodin 58 minut. Poloměr Země je 6 370 km, hmotnost Země je $6{,}00 \cdot 10^{24}$ kg. Určete

a) výšku satelitu nad povrchem Země,
b) velikost gravitační síly, kterou působí Země na satelit GPS při pohybu po kruhové oběžné dráze, a rychlost jeho pohybu na této oběžné dráze,
c) zorný úhel ve stupních, pod kterým satelit GPS snímá Zemi, a největší vzdálenost bodů (měřenou po povrchu Země), které ještě může tento jeden satelit v daném okamžiku zaměřit.

Ve všech úlohách zanedbejte vliv odporu prostředí. Řešte nejprve obecně, potom pro zadané hodnoty. (*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

Označme T oběžnou doby družice kolem Země, R_z poloměr a M hmotnost Země, h výšku satelitu nad povrchem Země.

a) Ze vztahu

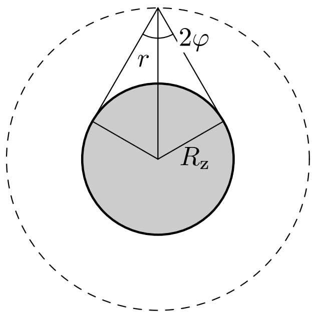
$$m\frac{4\pi^2}{T^2}r = \varkappa\frac{mM}{r^2},$$

vyjádříme neznámou r (obr. 1). Dostaneme

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2\varkappa M}{4\pi^2}}.$$

Protože je $r = R_z + h$, dostaneme

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2\varkappa M}{4\pi^2}} - R_z \doteq 20\,200\ \text{km}.$$



Obr. 1

b) Vztah pro r z úlohy a) dosadíme do vztahu pro gravitační sílu F_g a upravíme. Obdržíme

$$F_g = \varkappa\frac{mM}{r^2} = \sqrt[3]{\frac{16\pi^4\varkappa M}{T^4}}m \doteq 1\,020\ \text{N}.$$

Velikost rychlosti v satelitu pak určíme pomocí vztahu

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\varkappa M}{T}} \doteq 3{,}9\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c) Dle obr. 1 a po dosazení za r z úlohy a) můžeme pro zorný úhel φ psát

$$\sin\varphi = \frac{R_z}{r} = \frac{R_z}{\sqrt[3]{\frac{T^2\varkappa M}{4\pi^2}}},$$

z čehož $\varphi \doteq 14°$. Potom zorný úhel ze satelitu je $2\varphi \doteq 28°$. Největší vzdálenost bodů měřená po povrchu Země je $s = (\pi - 2\varphi)\cdot R_z$, kde je úhel φ nutno zadat v radiánech. Pro dané hodnoty je $s \doteq 16\,900$ km.