Emil Calda

O jedné geometrické konstrukci

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 4, 31–33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146442

O jedné geometrické konstrukci

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. The article deals with the construction of a perpendicular from a given point to the diameter of a given circle. The construction has to be done using only a straightedge.

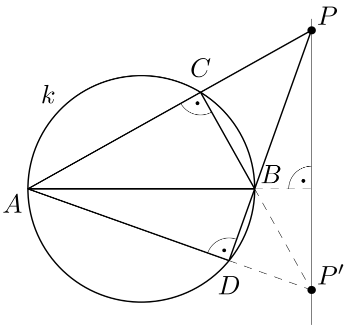
Představme si, že je dána kružnice k s průměrem AB a bod P, který na přímce AB neleží. Máte-li k dispozici pravítko a kružítko, není jistě problém vést bodem P k přímce AB kolmici. Dokážete ji však sestrojit i v případě, že můžete používat pouze pravítko? Je tato konstrukce s vyloučením kružítka vůbec proveditelná?

Jestliže se nad touto úlohou zamyslíte a načrtnete si několik obrázků, brzy zjistíte, že je nutno uvážit, jakou polohu bod P vzhledem k dané kružnici zaujímá. Jde zřejmě o následující možnosti:

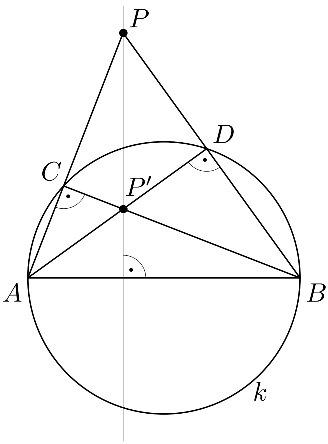
1. bod P leží vně kruhu ohraničeného kružnicí k, a to
   a) vně pásu určeného tečnami k této kružnici v bodech A, B,
   b) uvnitř tohoto pásu,
   c) na tečnách ke kružnici v bodech A, B;
2. bod P leží uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí k;
3. bod P leží na kružnici k.

V první z uvedených možností postupujeme podle obr. 1a takto: Určíme průsečíky C, D kružnice k s přímkami PA, PB a dále společný bod P' přímek BC a AD. Než budete číst dále, zkuste si zdůvodnit, že přímka PP' je hledaná kolmice k přímce AB. Důvod je zřejmý: Podle Thaletovy věty jsou úhly ADP a ACP' pravé, což znamená, že úsečky PD a $P'C$ jsou výšky trojúhelníku PAP' na strany AP' a AP, které se protínají v bodě B. Výška na stranu PP' prochází nutně bodem B, což znamená, že přímka PP' je kolmá na přímku AB.

Ve druhém případě znázorněném na obr. 1b sestrojíme hledanou kolmici podobně jako v obr. 1a. Bod P' je průsečík přímek BC a AD; to, že přímka PP' je hledaná kolmice k přímce AB si už jistě umíte zdůvodnit sami.



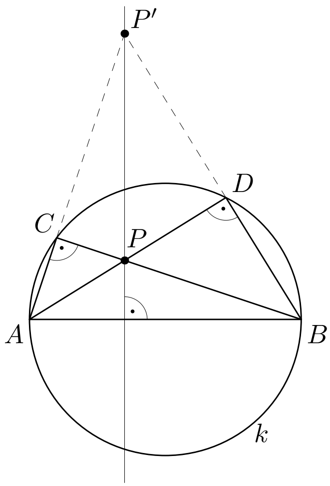
Obr. 1a



Obr. 1b

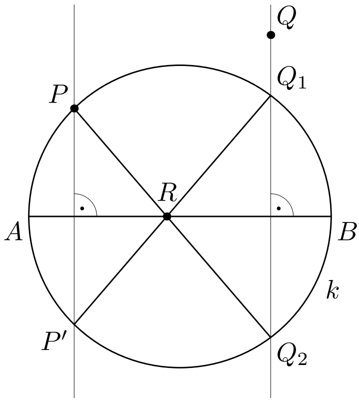
Ve třetím případě předpokládejme, že bod P leží například na tečně v bodě B. Pak buď bod C, nebo D splyne s bodem B a přímka PB je přímo hledaná kolmice.

Leží-li bod P uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí k, určíme podle obr. 2 bod P' jako společný bod přímek AC a BD a snadno zdůvodníme, že přímka PP' je kolmá na přímku AB.



Obr. 2

Poslední z pěti možností je ta, ve které bod P leží na kružnici k. Je znázorněna na obr. 3, kde Q je libovolný bod zvolený tak, že leží vně kruhu ohraničeného kružnicí k a uvnitř pásu určeného tečnami k této kružnici v bodech A, B. Bodem Q vedeme pouze s použitím pravítka kolmici k přímce AB (což už umíme) a sestrojíme její průsečíky Q_1, Q_2 s kružnicí k. Označme dále R průsečík přímek AB a PQ_2 a sestrojme bod P' jako společný bod kružnice k a přímky Q_1R. Z této konstrukce plyne, že přímka PP' je kolmá na přímku AB. Stačí si uvědomit, že přímka Q_1R je obrazem přímky Q_2R v osové souměrnosti s osou AB a dále že kružnice je souměrná podle svého průměru. Odtud dostáváme, že bod P' je v souměrnosti s osou AB obrazem bodu P, takže přímka PP' je kolmá na přímku AB.



Obr. 3

V řešené úloze je ke konstrukci kolmice k dané přímce použito pouze pravítko. Zkuste vyřešit podobnou úlohu, kde můžete použít pouze kružítko. V takovém případě je přímka chápána jen jako dvojice bodů.

Úloha: Je dána kružnice k se středem S a koncové body A, B průměru této kružnice. Dále je dán bod P, ležící na kolmici k úsečce AB, ale ne na úsečce AB, přičemž kolmice neprochází bodem S. Pouze užitím kružítka sestrojte průsečíky kolmice a kružnice k. (*Řešení najdete na str. 12*)

Literatura

[1] Herman, J. a kol.: *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií, Geometrické konstrukce.* Prometheus, Praha, 2009.