Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 3, 56–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146435

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2011

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

NAŠE SOUTĚŽ

V předchozích dvou ročnících Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

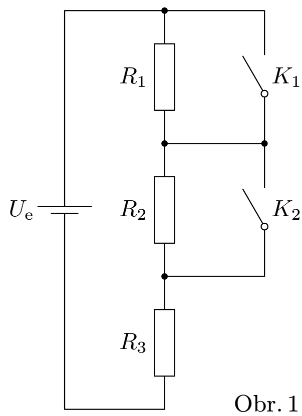
V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. listopadu 2011* na adresu redakce.

Úloha 21. Dokažte, že z posloupnosti mocnin $2^7, 2^8, \ldots, 2^{2011}$ zapsaných v desítkovém zápisu lze vybrat aspoň dvě skupiny po 21 číslech takových, že v každé skupině končí všechna čísla stejným trojčíslím a přitom v jiné skupině jiným trojčíslím. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 22. Tři rezistory jsou zapojeny podle schématu na obr. 1 ke zdroji stálého napětí se zanedbatelným vnitřním odporem. Jsou-li spínače K_1 a K_2 rozepnuty, mají rezistory výkony $P_1 = 1$ W, $P_2 = 2$ W, $P_3 = 3$ W. Jaký bude výkon P_4 spotřebiče 3, budou-li spínače K_1 i K_2 sepnuty? Jaké budou výkony P_5 spotřebiče 2 a P_6 spotřebiče 3, bude-li sepnut pouze spínač K_1? (*Jan Thomas*)



Obr. 1

Řešení úloh z čísla 1/2011

Úloha 17. Je dán trojúhelník ABC, kružnice jemu opsaná má poloměr r. V rovině trojúhelníku ABC je libovolně zvolen bod M, z něhož jsou postupně na přímky AB, BC, CA vedeny kolmice MC_0, MA_0, MB_0 s patami C_0, A_0, B_0. Dokažte, že platí

$$|A_0B_0| + |B_0C_0| + |C_0A_0| = \frac{|AB| \cdot |MC| + |BC| \cdot |MA| + |CA| \cdot |MB|}{2r}.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Dokážeme, že platí

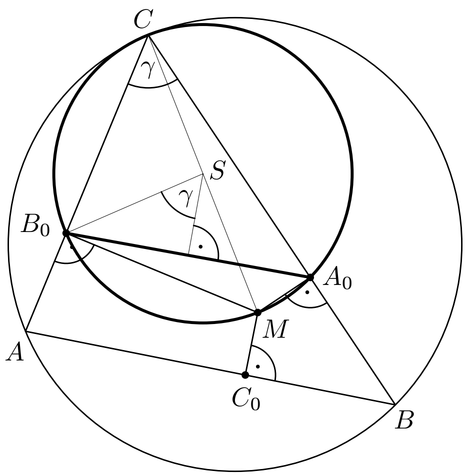
$$|A_0B_0| = \frac{|AB| \cdot |MC|}{2r}. \tag{1}$$

Analogicky pak platí

$$|B_0C_0| = \frac{|BC| \cdot |MA|}{2r}, \qquad |C_0A_0| = \frac{|CA| \cdot |MB|}{2r}. \tag{2}$$

Sečteme-li všechny tři rovnosti (1) a (2), dostaneme dokazovanou rovnost.

Rozeberme nejprve případ, kdy $M \neq C$ (obr. 1). Body A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem MC; ta má střed S.



Obr. 1

V trojúhelníku A_0B_0S platí

$$\sin\gamma = \frac{|A_0B_0|}{2} : \frac{|MC|}{2} = \frac{|A_0B_0|}{|MC|}.$$

Stejně tak v trojúhelníku ABC platí

$$\sin\gamma = \frac{|AB|}{2} : r = \frac{|AB|}{2r}.$$

Porovnáním obou výrazů dostaneme avizovanou rovnost

$$|A_0B_0| = \frac{|AB|\cdot|MC|}{2r}.$$

Je-li $M = C$, je $|MC| = 0$ a také $|A_0B_0| = 0$, proto též platí

$$|A_0B_0| = \frac{|AB|\cdot|MC|}{2r}.$$

Úloha 18. *Trubice ve vodě.*
Skleněná trubice délky $L = 120$ cm je z jedné strany zatavená. Trubici ponoříme svisle otevřeným koncem do vody o hustotě $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ tak, aby její zatavený konec byl v úrovni hladiny vody. Atmosférický tlak je $p_\mathrm{a} = 10^5$ Pa, tíhové zrychlení $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Jaký je tlak vzduchu uvnitř trubice?
b) Jaký bude tlak vzduchu uvnitř trubice, když ji ponoříme jen do poloviny její délky?

Předpokládejte, že všechny děje probíhají za stálé teploty. Uvažujte, že trubice má tvar válce, zaoblení na konci trubice neuvažujte.

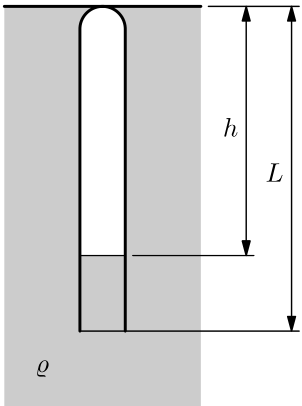
(*Jan Thomas*)

Autorské řešení:

a) Protože se jedná o děj za stálé teploty, můžeme psát

$$p_\mathrm{a}V_1 = (p_\mathrm{a} + p_\mathrm{h})V_2,$$

kde $V_1 = SL$, $V_2 = Sh$ jsou objemy vzduchu v trubici v jednotlivých polohách (S je obsah příčného průřezu trubice), $p_\mathrm{h} = h\varrho g$ (obr. 2).



Obr. 2: Trubice ve vodě

Po dosazení za objemy V_1, V_2 a hydrostatický tlak p_{h} do rovnice pro izotermický děj dostaneme

$$p_{\mathrm{a}}LS = (p_{\mathrm{a}} + h\varrho g)hS.$$

Dalšími úpravami obdržíme kvadratickou rovnici v proměnné h:

$$\varrho g h^2 + p_{\mathrm{a}}h - p_{\mathrm{a}}L = 0$$

Fyzikální význam má pouze kladné řešení

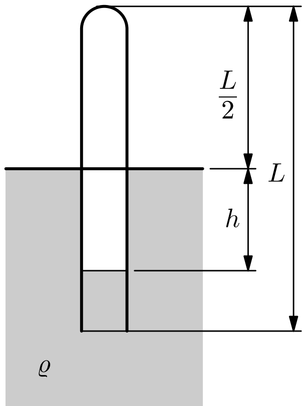
$$h = -\frac{p_{\mathrm{a}}}{2\varrho g} + \frac{1}{2\varrho g}\sqrt{p_{\mathrm{a}}^2 + 4\varrho g p_{\mathrm{a}} L}.$$

Tlak uvnitř trubice pak je

$$p = p_{\mathrm{a}} + h\varrho g = \frac{p_{\mathrm{a}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_{\mathrm{a}}}{2}\right)^2 + p_{\mathrm{a}}\varrho g L} \doteq 1{,}11 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

b) Budeme postupovat obdobně jako v a) (obr. 3). Napíšeme rovnici pro izotermický děj:

$$p_{\mathrm{a}}LS = (p_{\mathrm{a}} + h\varrho g)\left(\frac{L}{2} + h\right)S$$



Obr. 3: Část trubice ve vodě

Po úpravách opět dostaneme kvadratickou rovnici v proměnné h:

$$\varrho g h^2 + \left(p_\mathrm{a} + \varrho g \frac{L}{2}\right) h - p_\mathrm{a} \frac{L}{2} = 0$$

Fyzikální význam má pouze kladný kořen

$$h = \frac{-\left(p_\mathrm{a} + \varrho g \frac{L}{2}\right) + \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + 3 p_\mathrm{a} \varrho g L + \frac{(\varrho g L)^2}{4}}}{2 \varrho g}.$$

Tlak uvnitř trubice pak je

$$p = p_\mathrm{a} + h \varrho g = \frac{p_\mathrm{a}}{2} - \frac{\varrho g L}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + 3 p_\mathrm{a} \varrho g L + \frac{(\varrho g L)^2}{4}}$$
$$\doteq 1{,}05 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

* * * * *

Pokračování ze str. 61

Díky Štollovým hlubokým a širokým znalostem fyziky i její historie přichází na český knižní trh důkladná a objektivně zpracovaná příručka o vývoji vědy tvořící základ technického rozvoje. Protože autor předpokládá znalost běžných fyzikálních pojmů, přinese kniha největší užitek posluchačům a absolventům vysokých škol technického a přírodovědného zaměření a těm čtenářům, pro něž fyzika je (nebo byla) jedním z oblíbených předmětů středoškolského studia.

Ivo Kraus