Úlohy domácího kola 61. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

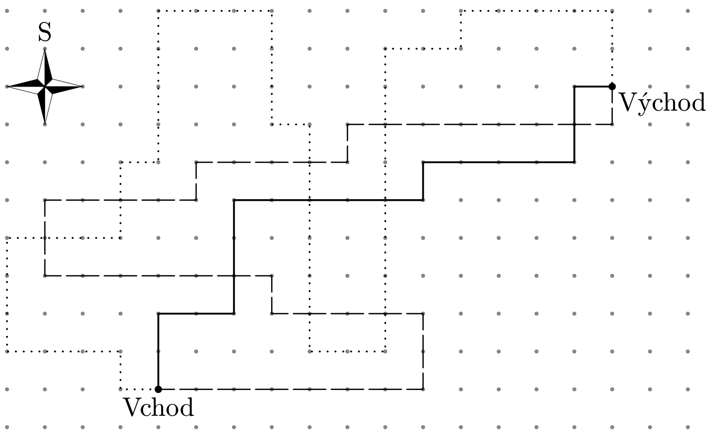
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 2, 27–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146417

Úlohy domácího kola 61. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

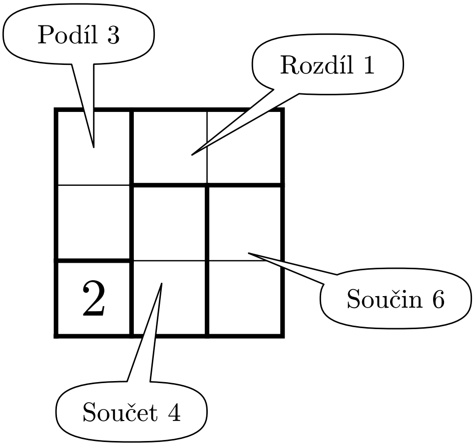
KATEGORIE Z5

Z5–I–1 Tři kamarádi Pankrác, Servác a Bonifác šli o prázdninách na noční procházku přírodním labyrintem. U vstupu dostal každý svíčku a vydali se různými směry. Všichni labyrintem úspěšně prošli, ale každý šel jinou cestou. V následující čtvercové síti jsou vyznačeny jejich cesty. Víme, že Pankrác nikdy nešel na jih a že Servác nikdy nešel na západ. Kolik metrů ušel v labyrintu Bonifác, když Pankrác ušel přesně 500 m?



(*M. Petrová*)

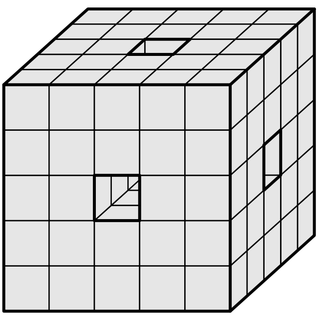
Z5–I–2 Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, nebo 3 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti. (Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.)



(*S. Bednářová*)

Z5–I–3 Jolana připravuje pro své kamarádky občerstvení — chlebíčky. Namaže je bramborovým salátem a navrch chce dát ještě další přísady: šunku, tvrdý sýr, plátek vajíčka a proužek nakládané papričky. Jenže nechce, aby některé dva její chlebíčky obsahovaly úplně stejnou kombinaci přísad. Jaký největší počet navzájem různých chlebíčků může vytvořit, jestliže žádný z nich nemá mít všechny čtyři přísady a žádný z nich není pouze se salátem (tj. bez dalších přísad)? (*M. Petrová*)

Z5–I–4 Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Z kolika kostiček je stavba slepena?

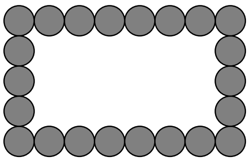


(*M. Krejčová*)

Z5–I–5 V pohádce o sedmero krkavcích bylo sedm bratrů, z nichž každý se narodil přesně rok a půl po předchozím. Když byl nejstarší z bratrů právě čtyřikrát starší než nejmladší, matka všechny zaklela. Kolik let bylo sedmero bratrům krkavcům, když je jejich matka zaklela?

(*M. Volfová*)

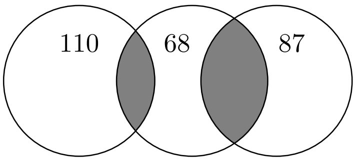
Z5–I–6 Janka a Hanka si rády hrají s modely zvířátek. Hanka pro své kravičky sestavila z uzávěrů od PET lahví obdélníkovou ohrádku, viz obrázek. Janka ze všech svých uzávěrů složila pro ovečky ohrádku tvaru rovnostranného trojúhelníku. Poté ji rozebrala a postavila pro ně ohradu čtvercovou, rovněž ze všech svých uzávěrů. Kolik mohla mít Janka uzávěrů? Najděte aspoň 2 řešení.



(*M. Volfová*)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1 Na obrázku jsou tři stejně velké kruhy. Společné části sousedních kruhů jsme šedě vybarvili. Bílé části mají v obrázku zapsány své obsahy, a to v centimetrech čtverečních. Vypočítejte obsahy obou šedých částí.

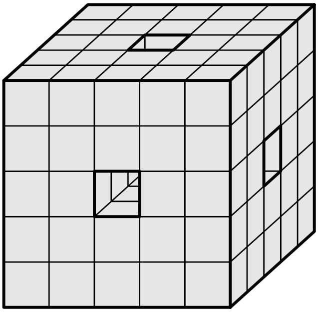


(*L. Šimůnek*)

Z6–I–2 Do hračkářství přivezli nová plyšová zvířátka: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nohou a 4 křídla, každý pštros má 2 nohy a 2 křídla a každý krab má 8 nohou a 2 klepeta. Dohromady mají tyto přivezené hračky 118 nohou, 22 křídel a 22 klepet. Kolik mají dohromady hlav?

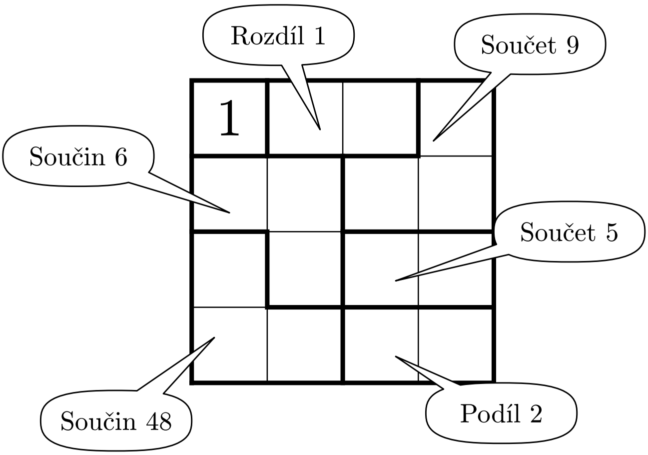
(*M. Petrová*)

Z6–I–3 Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Hotovou stavbu jsme celou ponořili do barvy. Kolik kostiček má obarvenu aspoň jednu stěnu?



(*M. Krejčová*)

Z6–I–4 Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, 3, nebo 4 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti. (Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.)



(*S. Bednářová*)

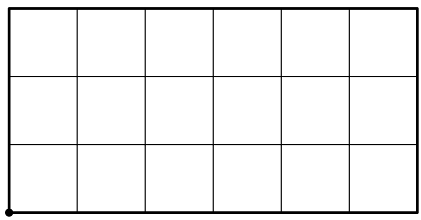
Z6–I–5 Ondra, Matěj a Kuba dostali k Vánocům od prarodičů každý jednu z následujících hraček: velké hasičské auto, vrtulník na dálkové ovládání a stavebnici Merkur. Bratranec Petr doma vyprávěl:

„Ondra dostal to velké hasičské auto. Přál si ho sice Kuba, ale ten ho nedostal. Matěj nemá v oblibě stavebnice, takže Merkur nebyl pro něj.“

Ukázalo se, že ve sdělení, jaký dárek kdo dostal či nedostal, se Petr dvakrát mýlil a jen jednou vypovídal správně. Jak to tedy s dárky bylo?

(*M. Volfová*)

Z6–I–6 Marta, Libuše a Marie si vymyslely hru, kterou chtějí hrát na obdélníkovém hřišti složeném z 18 stejných čtverců, viz obrázek. Ke hře potřebují hřiště rozdělit dvěma rovnými čárami na tři stejně velké části. Navíc tyto čáry musejí obě procházet tím rohem hřiště, který je na obrázku vlevo dole. Poraďte děvčatům, jak mají dokreslit čáry, aby si mohla začít hrát.



(*E. Trojáková*)

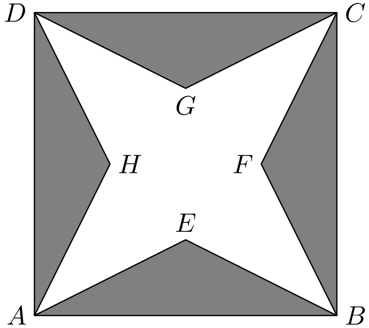
KATEGORIE Z7

Z7–I–1 Trpaslíci si chodí k potoku pro vodu. Džbánek každého z trpaslíků je jinak velký: mají objemy 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 litrů. Trpaslíci si džbánky mezi sebou nepůjčují a vždy je přinesou plné vody.

- Kejchal přinese ve svém džbánku víc vody než Štístko.
- Dřímal by musel jít pro vodu třikrát, aby přinesl právě tolik vody jako Stydlín v jednom svém džbánku.
- Prófův džbánek je jen o 2 litry větší než Štístkův.
- Sám Šmudla přinese tolik vody jako Dřímal a Štístko dohromady.
- Když jdou pro vodu Prófa a Šmudla, přinesou stejně vody jako Rejpal, Kejchal a Štístko.

Kolik vody přinesou dohromady Kejchal a Šmudla? (*M. Petrová*)

Z7–I–2 Na obrázku je čtverec $ABCD$, ve kterém jsou umístěny čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABE, BCF, CDG a DAH, všechny šedě vybarvené. Strany čtverce $ABCD$ jsou základnami těchto rovnoramenných trojúhelníků. Víme, že šedé plochy čtverce $ABCD$ mají dohromady stejný obsah jako jeho bílá plocha. Dále víme, že $|HF| = 12\,\text{cm}$. Určete velikost strany čtverce $ABCD$.



(*L. Šimůnek*)

Z7–I–3 Sedm bezprostředně po sobě jdoucích celých čísel stálo v řadě, seřazeno od nejmenšího po největší. Po chvíli se čísla začala nudit, a tak se nejdřív první vyměnilo s posledním, potom se prostřední posunulo úplně na začátek řady a nakonec si největší z čísel stouplo doprostřed. Ke své veliké radosti se tak ocitlo vedle čísla se stejnou absolutní hodnotou. Kterých sedm čísel mohlo stát v řadě? (*S. Bednářová*)

Z7–I–4 Učitelka Smolná připravovala prověrku pro svou třídu ve třech verzích, aby žáci nemohli opisovat. V každé verzi zadala tři hrany kvádru a dala za úkol vypočítat jeho objem. Úlohy si ale dopředu nevyřešila, a tak netušila, že výsledek je ve všech třech verzích stejný. Do zadání žákům zapsala tyto délky hran: 12, 18, 20, 24, 30, 33 a 70, všechny v centimetrech. Z devíti délek hran, které učitelka Smolná zadala, jsme vám tedy prozradili pouze sedm a ani jsme nesdělili, které délky patří do téhož zadání. Určete zbylé dvě délky hran. (*L. Šimůnek*)

Z7–I–5 Jeden vnitřní úhel v trojúhelníku měří 50°. Jak velký úhel svírají osy zbývajících dvou vnitřních úhlů? (*L. Hozová*)

Z7–I–6 Hledáme šestimístný číselný kód, o němž víme, že:

- žádná číslice v něm není vícekrát,
- obsahuje i 0, ta však není na předposledním místě,
- ve svém zápisu nemá nikdy vedle sebe dvě liché ani dvě sudé číslice,
- sousední jednomístná čísla se liší aspoň o 3,
- čísla, která získáme přečtením prvního a druhého dvojčíslí, jsou obě násobkem čísla vzniklého přečtením třetího, tedy posledního dvojčíslí.

Určete hledaný kód. (*M. Volfová*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1 Korespondenční matematická soutěž probíhá ve třech kolech, jejichž náročnost se stupňuje. Do druhého kola postupují jen ti řešitelé, kteří byli úspěšní v prvním kole, do třetího kola postupují jen úspěšní řešitelé druhého kola. Vítězem je každý, kdo je úspěšným řešitelem posledního, tedy třetího kola. V posledním ročníku této soutěže bylo přesně 14 % řešitelů úspěšných v prvním kole, přesně 25 % řešitelů druhého kola postoupilo do třetího kola a přesně 8 % řešitelů třetího kola zvítězilo.

Jaký je nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola? Kolik by v takovém případě bylo vítězů? (*M. Petrová*)

Z8–I–2 Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB dlouhou 10 cm a rameny dlouhými 20 cm. Bod S je střed základny AB. Rozdělte trojúhelník ABC čtyřmi přímkami procházejícími bodem S na pět částí se stejným obsahem. Zjistěte, jak dlouhé úsečky vytnou tyto přímky na ramenech trojúhelníku ABC. (*E. Trojáková*)

Z8–I–3 Hledáme pětimístné číslo s následujícími vlastnostmi: je to palindrom (tj. čte se pozpátku stejně jako zepředu), je dělitelné dvanácti a ve svém zápisu obsahuje číslici 2 bezprostředně za číslicí 4. Určete všechna možná čísla, která vyhovují zadaným podmínkám. (*M. Mach*)

Z8–I–4 Na střed hrnčířského kruhu jsme položili krychli, která měla na každé své stěně napsáno jedno přirozené číslo. Těsně předtím, než jsme kruh roztočili, jsme ze svého stanoviště viděli tři stěny krychle, a tedy pouze tři čísla. Jejich součet byl 42. Po otočení hrnčířského kruhu o 90° jsme ze stejného místa pozorovali tři stěny s čísly dávajícími součet 34 a po otočení o dalších 90° jsme stále z téhož místa viděli tři čísla o součtu 53.

1. Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších 90°.
2. Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli. (*L. Šimůnek*)

Z8–I–5 Pankrác, Servác a Bonifác jsou bratři, kteří mají P, S a B let. Víme, že P, S a B jsou přirozená čísla menší než 16, pro něž platí:

$$P = \frac{5}{2}(B - S), \qquad S = 2(B - P), \qquad B = 8(S - P).$$

Určete stáří všech tří bratrů. (*L. Hozová*)

Z8–I–6 Janka si narýsovala obdélník s obvodem 22 cm a délkami stran vyjádřenými v centimetrech celými čísly. Potom obdélník rozdělila beze zbytku na tři obdélníky, z nichž jeden měl rozměry 2 cm × 6 cm. Součet obvodů všech tří obdélníků byl o 18 cm větší než obvod původního obdélníku. Jaké rozměry mohl mít původní obdélník? Najděte všechna řešení. (*M. Dillingerová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1 Pokladní v galerii prodává návštěvníkům vstupenky s číslem podle toho, kolikátí ten den přišli. První návštěvník dostane vstupenku s číslem 1, druhý s číslem 2 atd. Během dne však došel žlutý papír, na který se vstupenky tiskly, proto musela pokladní pokračovat tisknutím na papír červený. Za celý den prodala stejně žlutých vstupenek jako červených. Zjistila, že součet čísel na žlutých vstupenkách byl o 1 681 menší než součet čísel na červených vstupenkách. Kolik toho dne prodala vstupenek? (*M. Mach*)

Z9–I–2 Filoména má mobil s následujícím rozmístěním tlačítek:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

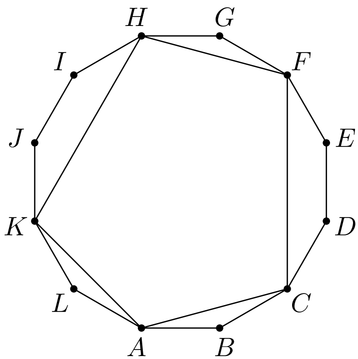
Devítimístné telefonní číslo její nejlepší kamarádky Kunhuty má tyto vlastnosti:

- všechny číslice Kunhutina telefonního čísla jsou různé,
- první čtyři číslice jsou seřazeny podle velikosti od nejmenší po největší a středy jejich tlačítek tvoří čtverec,
- středy tlačítek posledních čtyř číslic také tvoří čtverec,
- telefonní číslo je dělitelné třemi a pěti.

Kolik různých devítimístných čísel by mohlo být Kunhutiným telefonním číslem? (*K. Pazourek*)

Z9–I–3 Amálka pozorovala veverky na zahrádce hájenky, kde rostly tyto tři stromy: smrk, buk a jedle. Veverky seděly v klidu na stromech, takže je mohla spočítat — bylo jich 34. Když přeskákalo 7 veverek ze smrku na buk, bylo jich na buku stejně jako na obou dvou jehličnanech dohromady. Poté ještě přeskákalo 5 veverek z jedle na buk, v tu chvíli bylo na jedli stejně veverek jako na smrku. Na buku jich poté bylo dvakrát tolik, co na jedli ze začátku. Kolik veverek původně sedělo na každém ze stromů? (*M. Mach*)

Z9–I–4 V pravidelném dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ vepsaném do kružnice o poloměru 6 cm určete obvod pětiúhelníku $ACFHK$.



(*K. Pazourek*)

Z9–I–5 Před vánočním koncertem nabízeli žáci k prodeji 60 výrobků z hodin výtvarné výchovy. Cenu si mohl každý zákazník určit sám a celý výtěžek šel na dobročinné účely. Na začátku koncertu žáci spočítali, kolik korun v průměru utržili za jeden prodaný výrobek, a vyšlo jim přesně celé číslo. Protože stále neprodali všech 60 výrobků, nabízeli je i po koncertě. To si lidé koupili ještě dalších sedm, za které dali celkem 2 505 Kč. Tím se průměrná tržba za jeden prodaný výrobek zvýšila na rovných 130 Kč. Kolik výrobků pak zůstalo neprodaných? (*L. Šimůnek*)

Z9–I–6 V obdélníkové zahradě roste broskvoň. Tento strom je od dvou sousedních rohů zahrady vzdálen 5 metrů a 12 metrů a vzdálenost mezi zmíněnými dvěma rohy je 13 metrů. Dále víme, že broskvoň stojí na úhlopříčce zahrady. Jak velká může být plocha zahrady? (*M. Mach*)

61. ročník Matematické olympiády, úlohy domácího kola kategorie P

Úlohy P-I-1 a P-I-2 jsou praktické, vaším úkolem v nich je vytvořit a odladit efektivní program v jazyce Pascal, C nebo C++. Řešení těchto dvou úloh odevzdávejte ve formě zdrojového kódu přes webové rozhraní přístupné na stránce *http://mo.mff.cuni.cz/submit/*, kde také naleznete další informace. Odevzdaná řešení budou automaticky vyhodnocena pomocí připravených vstupních dat a výsledky vyhodnocení se dozvíte krátce po odevzdání. Pokud váš program nezíská plný počet bodů, můžete své řešení opravit a znovu odevzdat.

Úlohy P-I-3 a P-I-4 jsou teoretické, vaším úkolem je nalézt efektivní algoritmus řešící zadaný problém. Řešení úlohy se skládá z popisu navrženého algoritmu, zdůvodnění jeho správnosti (funkčnosti) a odhadu časové a paměťové složitosti. Součástí řešení je i zápis algoritmu ve formě zdrojového kódu nebo pseudokódu v úloze P-I-3 a výsledný zlomkový program v úloze P-I-4. Řešení těchto dvou úloh odevzdávejte ve formě souboru typu PDF přes výše uvedené webové rozhraní.

Řešení všech úloh můžete odevzdávat do 15. listopadu 2011. Opravená řešení úloh a seznam postupujících do krajského kola najdete na webo-