Ivo Volf

Takřka kouzelné číslo $6,022 * 10^23$

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 2, 8–13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146413`

FYZIKA

Takřka kouzelné číslo $6{,}022 \cdot 10^{23}$

Ivo Volf, UHK, Hradec Králové

Abstract. Mechanics gives the secondary school students a sufficient idea of a body and its motion. From our everyday life, we know contact forces and forces acting within certain distance. The article applies the knowledge of classical mechanics on material structure and on molecular-kinetic theory.

Ve školské fyzice na střední škole se začíná výklad poznatky o poloze bodu, o změnách polohy, o příčinách změn polohy a pohybu těles. S mechanikou a jejími zákonitostmi se středoškolák osobně setkává v praxi každodenního života. Zbytečně se neříká, že mechanika je základem fyziky.

Poté, co se začne fyzika zabývat tepelnými jevy, má školská fyzika vcelku dvě možnosti – buď jít cestou fenomenologickou, při níž se popisují jevy, které je možno pozorovat, nebo pokusy, které jsou předvedeny, popsat je podrobně a nacházet vztahy mezi veličinami, které jsme k popisu použili. Tak např. nalijeme-li studenou vodu do konvice, abychom si připravili kávu nebo čaj, bude nás zajímat hmotnost vody (nebo objem vody), počáteční a koncová teplota a pak buď doba, po kterou se voda bude zahřívat, a my vypočítáme efektivní tepelný výkon, nebo úlohu řešíme naopak (přečteme si na štítku rychlovarné konvice údaje o výkonu a určíme dobu, po kterou se voda bude ohřívat). Nedobudeme se však k podstatě, jak ohřívání probíhá, jaký je mikroskopický mechanismus tohoto jevu. Na to nám odpoví molekulárně-kinetická teorie, pro niž musíme znát mikrostrukturu látek a principy chování nejmenších částeček – molekul a atomů.

Představa částic, jejich chování, rozměrů, pohybu apod. se však vymyká běžné fantazii středoškoláka – molekuly nikdy neviděl (na rozdíl od startujícího automobilu), rychlost molekul plynů tvořících vzduch je nepředstavitelně veliká a k tomu přistupují velké počty částic, které jsou obsaženy v poměrně malých prostorech. Zde musí nastoupit zcela jiné představy, které jsou budovány na užití matematických výpočtů, popř. na bázi fyzikálních modelů, pochopitelných středoškolákovi. Náš přístup je založen na jednoduchých matematických výpočtech, které dovolují udělat si představu v běžném prostoru, popsaném elementární geometrií (z matematiky), na využití Mendělejevovy periodické tabulky prvků (z chemie) a na znalosti Avogadrovy konstanty (viz titulek).

Avogadrova konstanta vyjadřuje počet částic v jednotkovém látkovém množství (1 molu). Je pojmenována po italském fyzikovi Amedeo Avogadrovi, celým jménem Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro di Quaregna e Cerreto, který žil v letech 1776 až 1856 v italském Turínu a jenž je jedním ze zakladatelů fyziky plynů. Jeho objevy umožnily určení relativních atomových hmotností prvků. Hodnotu Avogadrovy konstanty poprvé vypočetl Johann Josef Loschmidt (1821–1895) roku 1865. (Loschmidt pocházel od Karlových Varů a studoval na univerzitě v Praze.) Ukažme si, jak tohoto „kouzelného čísla“ můžeme využít.

Příklad 1. *Jak si představíme nepředstavitelně velké číslo?* Kdosi řekl, že v 10 litrech vzduchu za normálních podmínek je asi stejně molekul plynů, jako je na Sahaře zrnek písku. Přestože každé přirovnání prý kulhá, kulhá opravdu?

Řešení: Avogadrova konstanta představuje počet entit (částic) v 1 molu plynu za normálních podmínek (při teplotě 273 K a tlaku 101 325 Pa). Objem 1 molu plynu je roven 22,41 litru, tj. 0,022 41 m^3. V 10 litrech plynu je potom $2{,}7 \cdot 10^{23}$ částic. Průměrné zrnko písku si představíme tak, že by se vešlo do buňky tvaru krychličky o hraně 1 mm, tedy má objem $1\ \mathrm{mm}^3 = 1{,}0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^3$. Kdyby zrnek písku na Sahaře bylo stejně jako počet molekul v 10 litrech, potom objem písku by byl $\left(2{,}7 \cdot 10^{23}\right)\cdot\left(1{,}0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^3\right) = 2{,}7\cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^3$. Plošný obsah Sahary se uvádí $9\ 000\ 000\ \mathrm{km}^2 = 9 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^2$, takže střední vrstva písku na poušti může tvořit

$$\frac{2{,}7 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^3}{9 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^2} = 30\ \mathrm{m}.$$

Uvážíme-li, že místy může být písek svátý a jinde navátý do velké vrstvy, nejsme tedy příliš daleko od uvedeného přirovnání.

Příklad 2. *Jak dlouho bychom počítali částice v 1 molu?* Představte si, že by každý z 6 miliard lidí po celý rok jen odpočítával molekuly vzduchu v objemu 1 molu za normálních podmínek, a to tak, že každou sekundu by přesunul 1 000 částic do jiného prostoru. Jakou část molekul by ve srovnání s původním počtem všichni přesunuli?

Řešení: Rok má přibližně $365{,}25 \cdot 86\ 400$ sekund $\doteq 3{,}16 \cdot 10^7$ s. Jeden člověk by tak za rok přesunul $3{,}16 \cdot 10^7 \cdot 1\ 000$ částic $= 3{,}16 \cdot 10^{10}$ částic, 6 miliard lidí by přesunulo za rok asi $(3{,}16 \cdot 10^{10}) \cdot (6 \cdot 10^{9})$ částic, tedy $1{,}9 \cdot 10^{20}$ částic, což představuje 1/3 000 původního počtu částic v 1 molu za normálních podmínek. Kdyby každý člověk odpočítával milión vypouštěných částic za sekundu, dostali bychom se v případě 6 miliard lidí na hodnotu $1{,}9 \cdot 10^{23}$ částic za rok, tj. ještě více než 2/3 částic by zůstalo v původním prostoru.

Příklad 3. *Odhadněte hmotnost a lineární rozměry molekuly vody H_2O.*

Řešení: 1 mol vody má hmotnost 18 g = 0,018 kg, při hustotě 1 000 kg/m^3 je molární objem vody 18 cm^3 = 0,000 018 m^3. Odtud pro hmotnost jedné molekuly přibližně vychází

$$\frac{0{,}018\ \mathrm{kg}}{6 \cdot 10^{23}} = 3{,}0 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

a objem je přibližně roven

$$\frac{0{,}000\ 018\ \mathrm{m}^3}{6 \cdot 10^{23}} = 3{,}0 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{m}^3.$$

Odtud pro lineární rozměry molekuly vody vychází asi 0,31 nm. Problémem zůstává tvar molekuly vody – ten totiž neuvažujeme, jen jsme se pokusili odhadnout rozměry malé krychličky, do níž by se pravděpodobně částice vešla.

Příklad 4. *Jaké jsou střední vzdálenosti molekul plynů tvořících vzduch?*

Řešení: Vzduch tvoří převážně dvouatomové molekuly dusíku a kyslíku (skoro 99 % objemu), argonu (asi 1 %), ostatní plyny můžeme vzít jako stopové, včetně pro lidstvo problematického oxidu uhličitého. Za normálních podmínek, tj. za teploty 273 K, tlaku 101 325 Pa, je objem 1 molu plynu přibližně 22,41 litru = 0,022 41 m^3; potom objem připadající na molekulu je roven asi

$$\frac{0{,}022\ 41\ \mathrm{m}^3}{6 \cdot 10^{23}} = 37 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{m}^3.$$

Protože lineární rozměry molekul se nebudou příliš lišit od molekuly vody, vycházejí vzdálenosti částic asi 3,3 nm, tj. jsou asi desetkrát větší než lineární rozměry částic. Proto jsou plyny poměrně dobře stlačitelné; zmenšování objemu se projevuje zmenšením volného prostoru mezi částicemi.

Příklad 5. *Jak se změní vzdálenosti molekul plynů?* Jak se změní vzdálenosti molekul plynů tvořících vzduch, když tlak plynu klesne na 0,1 % původního tlaku?

Řešení: Tlak plynu klesne na 1/1 000 původní hodnoty, takže počet částic v jednotce objemu klesne také tisíckrát a vzdálenosti částic se nutně zvětší. V prostoru 1 molu bude $6{,}0 \cdot 10^{20}$ částic, prostor pro jednu částici se změní asi na

$$\frac{0{,}022\,41\ \mathrm{m}^3}{6{,}0 \cdot 10^{20}} = 37 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{m}^3,$$

takže lineární vzdálenosti středů sousedních molekul budou přibližně 33 nm, tj. desetkrát větší. To ovlivní mj. střední volnou dráhu při pohybu molekul (střední vzdálenost mezi po sobě následujícími srážkami částic) nebo výboj v plynech za sníženého tlaku.

Příklad 6. *Určete hustotu plynné látky.* Na základě předcházejících výpočtů se pokuste dospět k hodnotě hustoty plynné látky, když využijete zatím zjištěných skutečností. Ověřte si své úvahy pro dva plyny: dusík a kyslík.

Řešení: Molární hmotnost zjistíme na základě Mendělejevovy periodické tabulky prvků – odtud dokážeme pomocí Avogadrovy konstanty stanovit hmotnost jedné molekuly (atomu). Loschmidtovo číslo nám určuje, kolik částic je v jednotce objemu za normálních podmínek. Například pro dusík vychází: molární hmotnost 0,028 kg/mol, hmotnost molekuly $4{,}7 \cdot 10^{-26}$ kg a hustota 1,27 kg/m^3. Pro kyslík vychází: molární hmotnost 0,032 kg/mol, hmotnost molekuly $5{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg a hustota 1,43 kg/m^3. Kdybychom chtěli stanovit hustotu vzduchu, museli bychom vycházet z procentuálního obsahu obou plynů v atmosféře.

Příklad 7. *Jak ovlivňuje vzdálenosti mezi částicemi krystalová struktura?* Porovnejte délky hran krystalové mřížky dvou možných krystalů železa, které krystaluje v různých uspořádáních atomů.

Řešení: Železo může vytvářet krystaly v krychlové soustavě, a to prostorově nebo plošně centrované. V prostorově centrované soustavě jsou atomy železa uspořádány ve vrcholech krychlových buněk a současně uprostřed každé buňky je umístěn další atom. Na jednu stavební buňku pak připadá jeden centrální atom a každý z osmi vrcholových atomů je společný s dalšími sedmi buňkami, tedy celkově musíme počítat

$1 + 8 \cdot 1/8 = 2$ buňky. Z jednoho molu železa potom vznikne při krystalizaci pouze asi $3{,}0 \cdot 10^{23}$ buněk. V plošně centrované soustavě jsou atomy železa uspořádány ve vrcholech krychlových buněk a současně uprostřed každé stěny je umístěn další atom, takže na jednu stavební buňku krystalové soustavy připadá $6 \cdot 1/2 + 8 \cdot 1/8 = 4$ atomy železa. Z jednoho molu železa potom vznikne při krystalizaci pouze asi $1{,}5 \cdot 10^{23}$ buněk. Mol železa má hmotnost 0,056 kg, hustota železa je 7 800 kg/m^3. Odtud určíme molární objem železa jako

$$\frac{0{,}056\ \mathrm{kg}}{7\,800\ \mathrm{kg/m^3}} = 7{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3}.$$

V případě prostorově centrované krychlové soustavy na jednu buňku připadá objem $24 \cdot 10^{-30}$ m^3, odkud určíme délku hrany buňky 0,288 nm. Pro plošně centrovanou krychlovou soustavu vychází objem $48 \cdot 10^{-30}$ m^3, délka hrany buňky potom je 0,363 nm.

Příklad 8. *Kolik sodíkových iontů najdeme v jednom kbelíku mořské vody?* Představte si situaci, že do Černého moře vhodíte obsah kilogramového pytlíku kuchyňské soli ve snaze navýšit jeho salinitu. Je jasné, že se obsah soli v mořské vodě příliš nezvýší. Projeví se to ale nějak v desetilitrovém kbelíku této vody, kterou jste nabrali po dokonalém rozmíchání vhozené soli?

Řešení: Černé moře má objem 547 000 km^3 vody, kuchyňská sůl NaCl má molární hmotnost 0,058 5 kg/mol, hustotu 2 163 kg/m^3, takže molární objem je přibližně $27{,}0\ \mathrm{cm^3} = 27 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$. V tomto objemu a při této hmotnosti obsahuje vzorek molu NaCl přibližně $6{,}0 \cdot 10^{23}$ dvojic Na-Cl, takže 1 kg kuchyňské soli obsahuje asi

$$\frac{1\ \mathrm{kg}}{0{,}058\,5\ \mathrm{kg}} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23}\ \text{částic},$$

tj. $1{,}03 \cdot 10^{25}$ dvojic Na-Cl. Objem vody v moři přepočítáme na desetilitrové kbelíky, což je asi $5{,}47 \cdot 10^{15}$ kbelíků. V každém z nich potom najdeme při dokonalém rozmíchání vsypané kuchyňské soli do moře přibližně $(1{,}03 \cdot 10^{25}) : (5{,}47 \cdot 10^{15}) = 1{,}9$ miliardy částic (tj. sodíkového kationtu či aniontu chlóru). Fascinující, ne?

Příklad 9. *Jak dlouhá by byla řada atomů uhlíku (grafit), kdyby se nám ji podařilo sestavit ze vzorku o látkovém množství 1 molu?*

Řešení: O uhlíku najdeme v encyklopedii následující údaje: molární hmotnost 0,012 kg/mol, hustota grafitu 2,27 g/cm^3. Molární objem je 5,3 cm^3. Na atom uhlíku pak připadá objem přibližně $8{,}83 \cdot 10^{-30}$ m^3, odkud lze odhadnout lineární rozměry atomu na 0,21 nm. Kdyby se nám podařilo sestavit „zástup“ atomů, pak jeho délka by byla asi $1{,}26 \cdot 10^{14}$ m, tj. 840 AU. Necháme-li utvořit tisícistup z atomů uhlíku, potom délka řetězce bude dosahovat od dráhy Venuše po dráhu Marsu.

Příklad 10. *Rybář na Bajkalském jezeře.* Na Bajkalském jezeře sedí rybář na loďce a chystá se posvačit posolenou housku. Krystalek soli o hmotnosti 0,2 g se mu zdál příliš velký, a tak ho odloupl a hodil do vody. Kdyby se podařilo sůl dokonale rozptýlit po celém objemu jezera, odhadněte, zda ve skleničce vody, kterou rybář nabere z jezera, se najde alespoň jedna dvojice Na^+ a Cl^-. Potřebné údaje získáte částečně z řešení příkladu 8.

Řešení: Bajkalské jezero má rozlohu 31 500 km^2, objem vody v něm je 23 000 km^3. Krystalek soli má hmotnost 0,2 g a jeho objem je přibližně 0,092 5 cm^3, obsahuje tedy asi 0,003 4 mol NaCl a $2{,}05 \cdot 10^{21}$ dvojic Na^+Cl^-. Objem vody v jezeře, které je největší zásobárnou kontinentální sladké vody, vyjádříme nejprve v m^3, potom počtem sklenic o objemu 0,2 litru: $23 \cdot 10^{12}$ m^3 $= 23 \cdot 10^{15}$ litrů, tj. $115 \cdot 10^{15}$ sklenic. Nyní určíme, kolik dvojic Na, Cl může být ve sklenici nabrané vody, což určíme přibližným poměrem $(2{,}05 \cdot 10^{21}) : (115 \cdot 10^{15}) = 17\,826$, tedy bude obsahovat v průměru 35 600 možností pro přítomnost Na či Cl.

Závěrem chceme jen podotknout, že jsme se snažili využívat pouze prostředků středoškolské matematiky, základních poznatků z fyziky, známých z výuky na základní či střední škole, a v titulku uvedené Avogadrovy konstanty. Možná, že by bylo zajímavé podívat se i na to, jak se molekuly pohybují a co o jejich pohybu jsme schopni zjistit. Možná, že by bylo také účelné se zabývat tím, jak se fyzikové dopracovali ke znalosti Avogadrovy konstanty. Ale to je již jiná pohádka.

Literatura

[1] Halliday, R., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika.* Vutium, Brno, Prometheus, Praha, 2000.

[2] Bartuška, K., Svoboda, E.: *Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika.* Prometheus, Praha, 2000.

[3] Svoboda, E.: *Přehled středoškolské fyziky.* Prometheus, Praha, 1996.