Rozhledy matematicko-fyzikální

Vladimír Strečko

Dva príklady substitúcií na riešenie rovníc

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 2, 5–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146412

Jak už jsme uvedli, je takto získaný výraz

$$\frac{a^2p + b^2q}{p + q} - pq$$

roven druhé mocnině délky příčky CX v trojúhelníku ABC na obr. 2, což je v plném souladu s výsledkem odvozeným na začátku článku.

Literatura

[1] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie.* PedF UK, Praha, 2009.

[2] Calda, E.: Skalární součin vektorů. *Matematika–fyzika–informatika* **15**, č. 6, (2006).

Dva príklady substitúcií na riešenie rovníc

Vladimír Strečko, Prešovská univerzita v Prešove

Abstract. The article presents solutions to more difficult trigonometric equations based on the use of two suitable substitutions.

V tomto článku chceme priblížiť riešenie dvoch náročnejších goniometrických rovníc založené na využití vhodných substitúcií [1, 2].

V prvom príklade prezentujeme metódu riešenia jednej náročnejšej goniometrickej rovnice, pričom chceme akcentovať najmä použitie substitúcie.

Príklad 1. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Riešenie:

Najprv použijeme známy vzorec pre sínus dvojnásobného uhla a dostaneme

$$2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Ukazuje sa ako výhodné ešte previesť rovnicu na tvar

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} + \operatorname{tg} x = 2,$$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} + \operatorname{tg} x = 2$$

aby sme mohli použiť substitúciu $\operatorname{tg} x = t$. Takže pre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, môžeme písať

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \operatorname{tg} x = 2.$$

Po zavedení substitúcie postupne dostaneme

$$\frac{2t}{t^2 + 1} + t = 2,$$

$$t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Táto kubická rovnica má koreň $t = 1$, preto

$$(t - 1)(t^2 - t + 2) = 0.$$

Rovnica $t^2 - t + 2 = 0$ nemá reálne riešenie, preto jediné reálne riešenie kubickej rovnice je $t = 1$. Odtiaľ vidíme, že riešenie pôvodnej rovnice je

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

V druhom príklade budeme prezentovať aplikáciu inej goniometrickej substitúcie.

Príklad 2. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\frac{2 \sin x}{2 - \cos x} = \frac{5 - 3 \sin x - 5 \cos x}{1 + \sin x + \cos x}.$$

Riešenie:

V tejto rovnici už nie je možné použiť predchádzajúci postup. Tu je výhodné použiť inú substitúciu, a síce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

To vykonáme pre $x \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pomocou polovičných argumentov takto:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odvodené vzťahy dosadíme do našej rovnice a po úprave dostaneme rovnosť zlomkov

$$\frac{4t}{2+2t^2-1+t^2} = \frac{5+5t^2-6t-5+5t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}. \tag{1}$$

Po vykonaní ekvivalentných úprav dostaneme

$$8t(t+1) = 2t(5t-3)(3t^2+1),$$

z čoho máme hneď jedno riešenie $t = 0$. Po roznásobení všetkých výrazov a anulovaním dostávame kubickú rovnicu

$$15t^3 - 9t^2 + t - 7 = 0. \tag{2}$$

Skusmo zistíme ďalšie riešenie rovnice $t = 1$. Po vydelení polynómu na ľavej strane rovnice (2) dvojčlenom $t-1$ dostaneme rovnicu $15t^2+6t+7 = 0$, ktorá nemá ďalšie reálne korene. Ani $t = 0$, ani $t = 1$ neanuluje menovateľov rovnice (1), preto sú obidve čísla riešením tejto rovnice.

Návratom k substitúcii dostaneme rovnice $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ a $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$. Riešením našej rovnice sú teda čísla $2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Čitateľ si môže dané substitúcie otestovať na riešení nasledujúcich úloh:

Úloha 1. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\cos x \sin 2x = 3\cos^3 x - \sin^3 x.$$

Úloha 2. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) \cdot \cos x = 1 - 2\cos^2 x.$$

Úloha 3. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\frac{1+\sin x - 3\cos x}{5 - 4\sin x + 3\cos x} = 2.$$

Úloha 4. V množine $\mathbb{R}$ riešte rovnicu

$$\frac{2-\cos x}{1+\sin x} = 1.$$

Riešenia na str. 43.

Literatura

[1] Birkhoff, G., MacLane, S.: *Prehľad modernej algebry.* ALFA, Bratislava, 1979.

[2] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* SPN, Praha, 1972.