Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 86 (2011), No. 1, 55–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146408

NAŠE SOUTĚŽ

V předchozích dvou ročnících Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální.

V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. května 2011* na adresu redakce.

Úloha 17. Je dán trojúhelník ABC, kružnice jemu opsaná má poloměr r. V rovině trojúhelníku ABC je libovolně zvolen bod M, z něhož jsou postupně na přímky AB, BC, CA vedeny kolmice MC_0, MA_0, MB_0 s patami C_0, A_0, B_0. Dokažte, že platí

$$|A_0B_0| + |B_0C_0| + |C_0A_0| = \frac{|AB| \cdot |MC| + |BC| \cdot |MA| + |CA| \cdot |MB|}{2r}$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 18. *Trubice ve vodě.*
Skleněná trubice délky $L = 120$ cm je z jedné strany zatavená. Trubici ponoříme svisle otevřeným koncem do vody o hustotě $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ tak, aby její zatavený konec byl v úrovni hladiny vody. Atmosférický tlak je $p_\mathrm{a} = 10^5$ Pa, tíhové zrychlení $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Jaký je tlak vzduchu uvnitř trubice?
b) Jaký bude tlak vzduchu uvnitř trubice, když ji ponoříme jen do poloviny její délky?

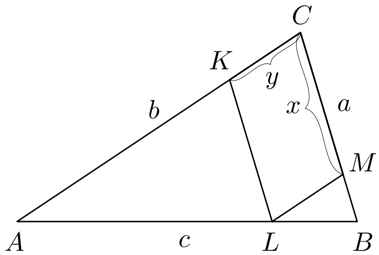
Předpokládejte, že všechny děje probíhají za stálé teploty. Uvažujte, že trubice má tvar válce, zaoblení na konci trubice neuvažujte.

(*Jan Thomas*)

Řešení úloh z čísla 3/2010

Úloha 13. Do daného trojúhelníku ABC vepište rovnoběžník $CKLM$ tak, aby bod K ležel na straně AC, bod L na AB, bod M na BC a aby obsah rovnoběžníku byl roven čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.
(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Označme $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|CM| = x$, $|CK| = y$, $|\sphericalangle MCK| = \gamma$ (obr. 1).



Obr. 1: K rozboru úlohy

Trojúhelníky ABC a LBM jsou podobné, proto platí $\frac{a}{b} = \frac{a-x}{y}$, odkud $y = \frac{b}{a}(a-x)$. Požadujeme, aby platilo

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{obsah } CKLM}{\text{obsah } ABC} = \frac{xy\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = \frac{2x\cdot\frac{b}{a}\cdot(a-x)}{ab} = \frac{2x(a-x)}{a^2}.$$

Odtud dostaneme

$$8x^2 - 8ax + a^2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{8a \pm \sqrt{32a^2}}{16} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\cdot a < a,$$

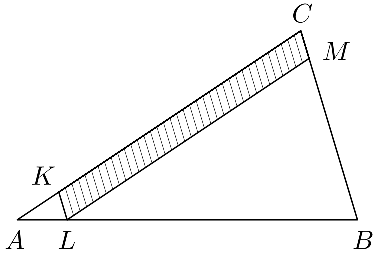
$$y_{1,2} = \frac{2\mp\sqrt{2}}{4}\cdot b < b.$$

Je-li

$$x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot a = \frac{a}{2} - \sqrt{2}\cdot\frac{a}{4},$$

sestrojíme k úsečce délky a úsečku délky $\frac{a}{2}$ a úhlopříčku čtverce o straně délky $\frac{a}{4}$; ta má délku $\sqrt{2}\cdot\frac{a}{4}$. Pak sestrojíme úsečku délky $x = \frac{a}{2} - \sqrt{2}\cdot\frac{a}{4}$.

Konstrukce bodů M, L, K je již jednoduchá (obr. 2).

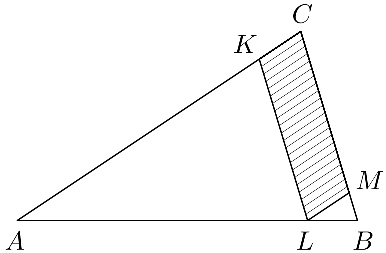


Obr. 2: První řešení

Je-li

$$x = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \cdot a = \frac{a}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{a}{4},$$

je konstrukce analogická (obr. 3).



Obr. 3: Druhé řešení

Úloha má vždy dvě řešení.

Úloha 14. *Těleso na nakloněné rovině.*
Těleso je vysláno posuvným pohybem vzhůru po nakloněné rovině počáteční rychlostí $v_0 = 2{,}00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Úhel nakloněné roviny je $\alpha = 15°$, součinitel smykového tření je $f = 0{,}10$.

a) Za jakou dobu a v jaké vzdálenosti se těleso zastaví?
b) Za jakou dobu se těleso dostane při pohybu zpět do původní počáteční polohy?
c) Jakou rychlostí projde těleso při pohybu zpět původní počáteční polohou?
d) Za jakou dobu od začátku pohybu dosáhne těleso stejně velké rychlosti, jako byla počáteční, a jaká bude v tomto okamžiku jeho vzdálenost od počáteční polohy?

e) Za jakou dobu od začátku pohybu dosáhne těleso stejně velké rychlosti, jako byla počáteční, a jaká bude v tomto okamžiku jeho vzdálenost od počáteční polohy?

Předpokládejte, že nakloněná rovina má od počáteční polohy tělesa dostatečnou délku nahoru i dolů, aby mohl proběhnout uvažovaný pohyb. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty. Tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. (*Miroslava Jarešová*)

Řešení:

a) Pohyb tělesa po nakloněné rovině směrem vzhůru je rovnoměrně zpomalený. Zrychlení má opačný směr než okamžitá rychlost a jeho velikost je

$$a_1 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

pro rychlost a dráhu platí

$$v = v_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t, \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2.$$

Když se těleso zastaví, je $v = 0$, z čehož určíme dobu výstupu a dráhu

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \doteq 0{,}57\ \mathrm{s}, \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} \doteq 0{,}57\ \mathrm{m}.$$

b) Při pohybu směrem dolů je zrychlení

$$a_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Aby se těleso dostalo do původní polohy, musí od místa zastavení urazit dráhu

$$s_2 = s_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_2^2,$$

odkud

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}} \doteq 0{,}85\ \mathrm{s}.$$

c) Rychlost při průchodu zpět původní počáteční polohou je

$$v_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_2 = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}} \doteq 1{,}35\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

d) Nejprve určíme dobu t_3 od okamžiku zastavení tělesa, za kterou těleso dosáhne v průběhu klesání rychlosti o velikosti v_0. Platí

$$v_0 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_3, \qquad t_3 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \doteq 1{,}26 \text{ s.}$$

Od začátku pohybu uplyne doba

$$T = t_1 + t_3 \doteq 1{,}83 \text{ s.}$$

Dráha měřená od místa zastavení je

$$s_3 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_3^2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \doteq 1{,}26 \text{ m.}$$

Těleso se přitom bude nacházet ve vzdálenosti

$$d = s_3 - s_1 \doteq 0{,}69 \text{ m}$$

od počáteční polohy.
Celková dráha s_c uražená od začátku pohybu je dána součtem

$$s_c = s_1 + s_3 \doteq 1{,}83 \text{ m.}$$

e) Dle podmínek úlohy musí být

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}} = \frac{2v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 2t_1.$$

Po úpravě

$$3\sin\alpha = 5f\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5f}{3}, \quad \alpha \doteq 9°28'.$$

Stav soutěže po 14 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů

Řešení úloh ze strany 33 a 34:

U1. Protože $a^n = a^{n-1} \cdot a$, musíme číslo a sečíst a^{n-1} krát.

U2. Nemůže, protože

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

a mezi n^2 a $(n + 1)^2$ neleží žádná druhá mocnina přirozeného čísla.

U3. Zbývá dolít 7/8 objemu číše, protože ta část naplněné číše tvoří kužel, který má vzhledem k celému kuželi každý rozměr poloviční. Jeho objem je tedy 1/8 objemu celého kužele.

U4. Jestliže má rovnice tvar $ax^2 + bx + c = 0$, pak podmínku úlohy $a + b + c = 0$ lze interpretovat jako $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$, což znamená, že číslo 1 je jejím kořenem.

U5. Protože každé přirozené číslo větší než 5 můžeme psát v některém z tvarů $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$, kde k je přirozené číslo a čísla $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$ a $6k + 4$ jsou složená, mohou mít prvočísla pouze vyjádření $6k + 1$ nebo $6k + 5$.

U6. Ano, protože trojúhelníky AUB a BUC mají stejný obsah. Jejich obsah dostaneme, když od obsahů trojúhelníků ABD a ABC, které mají stejný obsah, odečteme obsah trojúhelníku ABU.

U7. Ano, např. dva pravé úhly s rovnoběžnými rameny, z nichž jeden je vlastní podmnožinou druhého.

U8. Krychli s dolní podstavou $ABCD$ a horní $EFGH$ můžeme rozdělit na tři shodné jehlany: $EABCD$, $EBCGF$, $EDCGH$. Šest shodných jehlanů má za podstavy stěny krychle a hlavní vrchol ve středu krychle.

U9. Ano. Např. sinusoida nebo přímka.

U10. Trojúhelník ABC rozdělíme na 3 lichoběžníky se společným vrcholem M: $APMQ$, $BPMR$, $CQMR$. ($P \in AB$, $Q \in AC$, $R \in BC$, $QM \parallel AB$, $PM \parallel BC$, $RM \parallel AC$). Čtverec rozdělíme na lichoběžníky příčkou, která spojuje body dvou protilehlých stran, které nejsou jejich středy.

Správne odpovede zo strany 28:

1b, 2c, 3b, 4c, 5d, 6a, 7b, 8d, 9c, 10d, 11a, 12b, 13d, 14d, 15a