Tomáš Hejda

Indukcí na žabičky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 4, 71–75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146386

Indukcí na žabičky

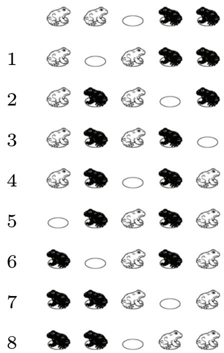
Tomáš Hejda, FJFI, ČVUT Praha

Abstract. The article solves a simple combinatorics game based on the jumping of frogs from a stone to a stone in a brook. The statements are proved by means of mathematical induction. The article refers to several phenomena from the branch of mathematics called "combinatorics on words".

Použijeme matematickou indukci pro nalezení postupu, jak řešit jednoduchou hru, kterou je možné nalézt na internetu [2]. Máme 3 černé a 3 bílé žabičky na 7 kamenech v potoce rozmístěné takto:

Naším úkolem je říct žabičkám, jak mají skákat, aby si černé a bílé prohodily místa, a současně určit, v kolika krocích to lze učinit. Žabička však může pouze skočit na prázdné místo před sebou nebo přeskočit jednu žabičku a sednout si na prázdný kámen. Úlohu budeme řešit obecně pro n černých a n bílých žabiček.

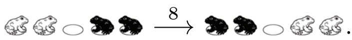
Řešení pro $n = 2$ lze provést v 8 krocích:



Než budete pokračovat ve čtení, zkuste si vyřešit úlohu pro $n = 3$.

V celé úloze budeme používat následující značení: Pokud s bude libovolné uspořádání žabiček, pak s^m pro libovolné přirozené číslo m bude označovat uspořádání $\underbrace{sss\cdots s}_{m\text{-krát}}$. Například

Značka $s \to t$ bude znamenat, že lze jedním skokem žabičky změnit uspořádání s na uspořádání t. Značka $s \xrightarrow{n} t$ bude znamenat, že tuto změnu lze provézt v n krocích. Jak jsme viděli v řešení pro $n = 2$, platí

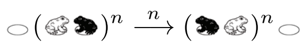


V několika pomocných tvrzeních – lemmatech – dojdeme k větě, která popíše, kolika skoky je možné žabičky prohodit. Tato lemmata nám také dají návod, jak to provést.

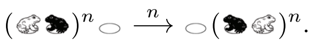
K důkazu lemmat použijeme matematickou indukci. Na Wikipedii [1] se dočteme, že náznaky důkazů indukcí se objevují již ve starověkém Řecku a že první skutečné důkazy jsou důkaz binomické věty a důkazy tvrzení kolem Pascalova trojúhelníku.

Důkaz indukcí vždy provádíme ve 2 krocích. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro číslo 1. Pak ukážeme, že z platnosti tvrzení pro libovolné přirozené číslo n (tzv. indukčního předpokladu) plyne platnost pro $n+1$.

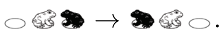
Lemma 1. Pro všechna přirozená čísla n platí



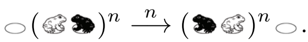
a také



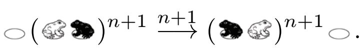
Důkaz: Použijeme, jak bylo předestřeno, matematickou indukci.

• *Krok* $n = 1$. Zjevně platí 

• *Krok z* n *na* $n + 1$. Vezměme pevné, ale libovolné $n \geq 1$ a předpokládejme pravdivost

 (1)

Tohoto chceme využít, abychom ukázali, že

 (2)

Všimneme si, že

$$\bigcirc(\square\blacksquare)^{n+1} = \bigcirc(\square\blacksquare)^{n}\square\blacksquare$$

a

$$(\blacksquare\square)^{n+1}\bigcirc = (\blacksquare\square)^{n}\blacksquare\square\bigcirc,$$

a pomocí indukčního předpokladu (1) dostaneme

$$\bigcirc(\square\blacksquare)^{n}\square\blacksquare \xrightarrow{n} (\blacksquare\square)^{n}\bigcirc\square\blacksquare \to (\blacksquare\square)^{n}\blacksquare\square\bigcirc,$$

což neznamená nic jiného, než platnost tvrzení (2).

Druhé tvrzení lemmatu bychom mohli ukázat úplně stejně matematickou indukcí. Není to ovšem nutné. V celé úloze je role černých a bílých žabiček symetrická, tj. kdybychom přebarvili bílé žabičky na černo a černé na bílo, stáli bychom před stejným úkolem. Kdybychom v právě dokázaném vztahu takto přebarvili žabičky a nechali je provést n skoků, pozorovatel *na opačné straně potoka* by viděl n skoků, které převedou řetězec $(\square\blacksquare)^{n}\bigcirc$ na $\bigcirc(\blacksquare\square)^{n}$. Druhou část lemmatu 1 lze tedy vyvodit z první části.

Lemma 2. Pro všechna přirozená čísla n platí

$$(\square)^{n}\bigcirc(\blacksquare)^{n} \xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}} \bigcirc(\square\blacksquare)^{n} \tag{3}$$

a

$$(\square)^{n}\bigcirc(\blacksquare)^{n} \xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}} (\square\blacksquare)^{n}\bigcirc. \tag{4}$$

Důkaz: Opět použijeme matematickou indukci.

• *Krok pro $n = 1$.* Zjevně platí $\square\bigcirc\blacksquare \to \bigcirc\square\blacksquare$ a symetricky $\square\bigcirc\blacksquare \to \blacksquare\square\bigcirc$.

• *Krok z n na $n+1$.* Předpokládejme, že pro n platí vztahy uvedené pod čísly (3) a (4). Chceme ukázat platnost

$$(\square)^{n+1}\bigcirc(\blacksquare)^{n+1} \xrightarrow{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \bigcirc(\square\blacksquare)^{n+1} \tag{3'}$$

a

$$(\square)^{n+1}\bigcirc(\blacksquare)^{n+1} \xrightarrow{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (\square\blacksquare)^{n+1}\bigcirc. \tag{4'}$$

S využitím lemmatu 1 dostaneme

$$(\Diamond)^{n+1}\circ(\blacklozenge)^{n+1} = \Diamond(\Diamond)^{n}\circ(\blacklozenge)^{n}\blacklozenge \xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}} \Diamond(\Diamond\blacklozenge)^{n}\circ\blacklozenge$$
$$\xrightarrow{n} \Diamond\circ(\blacklozenge\Diamond)^{n}\blacklozenge \to \circ\Diamond(\blacklozenge\Diamond)^{n}\blacklozenge = \circ(\Diamond\blacklozenge)^{n+1},$$

přičemž $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Tím jsme ukázali platnost $(3')$. Podobně bychom ukázali i platnost $(4')$.

Zajímavé na důkazu předchozího lemmatu je, že jsme matematickou indukcí dokazovali najednou obě tvrzení (3) a (4). Dokazovat každé tvrzení zvlášť by bylo mnohem obtížnější!

Nyní přizveme do našich úvah opět mocnou čarodějku, které se říká symetrie. Představme si, že $n(n+1)/2$ skoků, kterými žabičky z původního uspořádání $(\Diamond)^{n}\circ(\blacklozenge)^{n}$ dostaneme do $\circ(\Diamond\blacklozenge)^{n}$, sleduje a natáčí na kameru pozorovatel *na opačné straně potoka*. Doma si pak všech $n(n+1)/2$ skoků přehraje pozpátku. Při promítání filmu se tak začne s uspořádáním $(\Diamond\blacklozenge)^{n}\circ$ a končí se s $(\Diamond)^{n}\circ(\blacklozenge)^{n}$. Jednotlivé skoky ctí pravidlo o skákání na sousední kámen nebo přeskočení jedné žabičky, ale s tím rozdílem, že skáčou dozadu. Pokud bychom tedy na snímcích filmu otočili každou jednotlivou žabičku do protisměru, dostali bychom samé povolené skoky. Tím pádem platí i vztah

$$(\blacklozenge\Diamond)^{n}\circ \xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}} (\blacklozenge)^{n}\circ(\Diamond)^{n}. \tag{5}$$

Věta 1. *Nechť n je přirozené číslo. Potom*

$$(\Diamond)^{n}\circ(\blacklozenge)^{n} \xrightarrow{n(n+2)} (\blacklozenge)^{n}\circ(\Diamond)^{n}.$$

Důkaz: Podle vztahu (3) máme

$$(\Diamond)^{n}\circ(\blacklozenge)^{n} \xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}} \circ(\Diamond\blacklozenge)^{n}.$$

Podle lemmatu 1 platí

$$\circ(\Diamond\blacklozenge)^{n} \xrightarrow{n} (\blacklozenge\Diamond)^{n}\circ.$$

A nakonec podle vztahu (5)

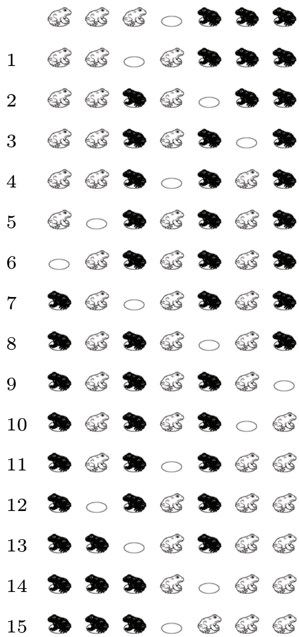
$$(\blacklozenge\Diamond)^{n}\circ \xrightarrow{\frac{n(n+1)}{2}} (\blacklozenge)^{n}\circ(\Diamond)^{n}.$$

Počet skoků je celkově roven

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+2).$$

Právě dokázaná věta nám říká, že úlohu lze vyřešit, a také, kolik skoků žabiček k tomu použijeme. Znění věty nedává návod, jaké skoky volit – tento návod je však ukryt v důkazech jednotlivých lemmat, které říkají, jaké tahy je potřeba volit.

Uveďme nyní řešení pro $n = 3$, které jste si jistě zkusili:



Zbývá odpovědět na otázku, je-li nastíněné řešení jednoznačné (samozřejmě až na symetrii), nebo jestli můžeme k přesunu použít méně či více kroků nebo volit jiné kroky. Tuto odpověď ponecháváme na čtenáři.

Literatura

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_Induction`.

[2] `http://www.flasharcade.com/puzzle-games/frog-game.html`.