Rozhledy matematicko-fyzikální

Úlohy domácího kola 60. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 2, 28–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146360

SOUTĚŽE

Úlohy domácího kola 60. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

KATEGORIE Z5

Z5–I–1 Vítek má napsána dvě čísla, 541 a 293. Z šesti použitých číslic má nejprve vyškrtnout dvě tak, aby součet dvou takto získaných čísel byl největší možný. Poté má z původních šesti číslic vyškrtnout dvě tak, aby rozdíl dvou takto získaných čísel byl nejmenší možný (odečítá menší číslo od většího). Které číslice má vyškrtnout? (*M. Petrová*)

Z5–I–2 V Trpasličím království měří vzdálenosti v pohádkových mílích (pm), v pohádkových sázích (ps) a v pohádkových loktech (pl). Na vstupní bráně do Trpasličího království je následující tabulka pro převody mezi jejich jednotkami a našimi:

- $1\,\mathrm{pm} = 3{,}85\,\mathrm{m}$,
- $1\,\mathrm{ps} = 105\,\mathrm{cm}$,
- $1\,\mathrm{pl} = 250\,\mathrm{mm}$.

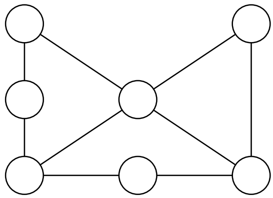
Král Trpaslík I. nechal přeměřit vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku. Tři pozvaní zeměměřiči dospěli k těmto výsledkům: první uváděl 4 pm 4 ps 18 pl, druhý 3 pm 2 ps 43 pl a třetí 6 pm 1 ps 1 pl. Jeden z nich se však zmýlil. Jaká je vzdálenost v metrech od zámecké brány k pohádkovému jezírku? O kolik centimetrů se spletl nepřesný zeměměřič? (*M. Petrová*)

Z5–I–3 Čtyři kamarádi Adam, Mojmír a dvojčata Petr a Pavel získali v hodinách matematiky celkem 52 smajlíků, každý alespoň 1. Přitom dvojčata dohromady mají 33, ale nejúspěšnější byl Mojmír. Kolik jich získal Adam? (*M. Volfová*)

Z5–I–4 Pan Tik a pan Tak prodávali budíky v prodejnách „Před Rohem“ a „Za Rohem“. Pan Tik tvrdil, že „Před Rohem“ prodali o 30 budíků více než „Za Rohem“, zatímco pan Tak tvrdil, že „Před Rohem“ prodali třikrát více budíků než „Za Rohem“. Nakonec se ukázalo, že Tik i Tak měli pravdu. Kolik budíků prodali v obou prodejnách celkem?

(*L. Hozová*)

Z5–I–5 Do kroužků na obrázku doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby součet čísel na každé vyznačené linii byl stejný. Žádné číslo přitom nesmí být použito víckrát.



(*M. Smitková*)

Z5–I–6 Paní Široká čekala večer hosty. Nejprve pro ně připravila 25 chlebíčků. Pak spočítala, že by si každý host mohl vzít dva, tři by se však na všechny nedostaly. Řekla si, že kdyby vyrobila ještě 10 chlebíčků, mohl by si každý host vzít tři, ale čtyři ne každý. To jí přišlo stále málo. Nakonec uchystala dohromady 52 chlebíčků. Každý host by si tedy mohl vzít čtyři chlebíčky, ale pět by se na všechny nedostalo. Kolik hostů paní Široká očekávala? Ona sama drží dietu a večer nikdy nejí. (*L. Šimůnek*)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1 Když Bořek natíral vrata garáže, přetřel omylem i stupnici nástěnného venkovního teploměru. Trubička se rtutí však zůstala nepoškozená, a tak Bořek původní stupnici přelepil páskem vlastní výroby. Na něj pečlivě vyrýsoval dílky, všechny byly stejně velké a označené čísly. Jeho dílek měl však jinou velikost než původní dílek, který představoval jeden stupeň Celsia, a i nulu Bořek umístil jinam, než kde bylo 0°C. Takto začal Bořek měřit teplotu ve vlastních jednotkách: bořcích. Když by měl teploměr ukazovat teplotu 11°C, ukazoval 2 bořky. Když by měl ukazovat -4°C, ukazoval -8 bořků. Jaká je teplota ve °C, vidí-li Bořek na svém teploměru teplotu -2 bořky? (*L. Šimůnek*)

Z6–I–2 Začínající písničkář prodával vždy po vystoupení CD se svou hudbou. Ve čtvrtek prodal osm stejných CD. Den nato už nabízel i své nové CD, a lidé si tak mohli koupit to samé jako ve čtvrtek nebo nové. V sobotu chtěli všichni posluchači nové CD a písničkář jich prodal ten den šest. V jednotlivých dnech utržil 590 Kč, 720 Kč a 840 Kč, neprozradíme však, která částka patří ke kterému dni.

- Kolik stálo starší CD?
- Kolik nových CD prodal v pátek? (*L. Šimůnek*)

Z6–I–3 Vojta napsal číslo 2010 stokrát bez mezer za sebou. Kolik čtyřmístných a kolik pětimístných souměrných čísel bylo ukryto v tomto zápise? (Souměrné číslo je takové číslo, které je stejné, je-li čteno zepředu i zezadu, např. 39193.) (*L. Hozová*)

Z6–I–4 Součin věků dědy Vendelína a jeho vnoučat je 2010. Součet věků všech vnoučat je 12 a žádná dvě vnoučata nemají stejný počet let. Kolik vnoučat má děda Vendelín? (*L. Hozová*)

Z6–I–5 Na táboře se dva vedoucí se dvěma táborníky a psem potřebovali dostat přes řeku a k dispozici měli jen jednu loďku o nosnosti 65 kg. Naštěstí všichni (kromě psa) dokázali loďku přes řeku převézt. Každý vedoucí vážil přibližně 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Jak si měli počínat? Kolikrát nejméně musela loďka překonat řeku?
(*M. Volfová*)

Z6–I–6 Karel obestavěl krabici s obdélníkovým dnem obrubou z krychliček. Použil právě 22 krychliček o hraně 1 dm, které stavěl těsně vedle sebe v jedné vrstvě. Mezi obrubou a stěnami krabice nebyla mezera a celá tato stavba měla obdélníkový půdorys. Jaké rozměry mohlo mít dno krabice?
(*M. Krejčová*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1 Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

- Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.
- Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.
- Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

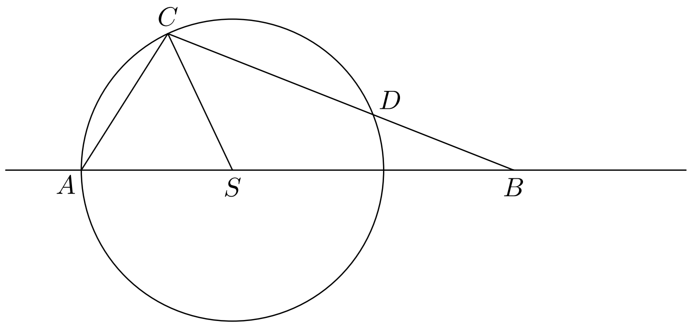
(*S. Bednářová*)

Z7–I–2 Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz a ze zbytku dal ještě $\frac{2}{3}$ na školu pro děti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zbytku ještě koupil malý dárek pro maminku. Z děravé kapsy ztratil $\frac{4}{5}$ zbylých peněz, a když ze zbylých dal půlku malé sestřičce, zůstala mu právě jedna koruna. S jakým obnosem šel Ondra na výlet? (*M. Volfová*)

Z7–I–3 Šárka prohlásila: „Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29.“ Před kolika lety se Šárka narodila? (*M. Volfová*)

Z7–I–4 Jindra měl napsáno čtyřmístné číslo. Toto číslo zaokrouhlil na desítky, na stovky a na tisíce a všechny tři výsledky zapsal pod toto číslo. Všechna čtyři čísla správně sečetl a dostal 5 443. Které číslo měl Jindra napsáno? (*M. Petrová*)

Z7–I–5 Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D, jak ukazuje obrázek. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a SCD?



(*L. Hozová*)

Z7–I–6 Najděte všechna trojmístná přirozená čísla, která jsou beze zbytku dělitelná číslem 6 a ve kterých můžeme vyškrtnout jakoukoli číslici a vždy dostaneme dvojmístné přirozené číslo, jež je také beze zbytku dělitelné číslem 6. (*L. Šimůnek*)

KATEGORIE Z8

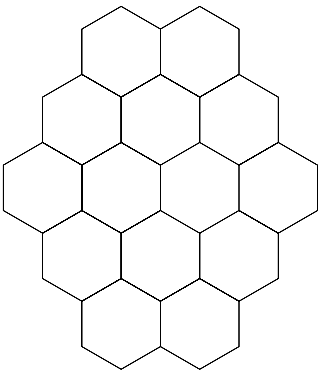
Z8–I–1 Martin má na papíře napsáno pětimístné číslo s pěti různými číslicemi a následujícími vlastnostmi:

- škrtnutím druhé číslice zleva (tj. číslice na místě tisíců) dostane číslo, které je dělitelné dvěma,
- škrtnutím třetí číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné třemi,
- škrtnutím čtvrté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné čtyřmi,
- škrtnutím páté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné pěti,
- neškrtne-li žádnou číslici, má číslo dělitelné šesti.

Které největší číslo může mít Martin napsáno na papíře?

(*M. Petrová*)

Z8–I–2 Karel se snažil do prázdných polí na obrázku vepsat přirozená čísla od 1 do 14 tak, aby žádné číslo nebylo použito víckrát a součet všech čísel v každé přímé linii byl stejný. Po chvíli si uvědomil, že to není možné. Jak byste Karlovo pozorování zdůvodnili vy? (Přímou linií rozumíme skupinu všech sousedících políček, jejichž středy leží na jedné přímce.)



(*S. Bednářová*)

Z8–I–3 Cena knížky „Nové hádanky“ byla snížena o 62,5 %. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna? (*M. Volfová*)

Z8–I–4 Rozdělte krychli o hraně 8 cm na menší shodné krychličky tak, aby součet jejich povrchů byl pětkrát větší než povrch původní krychle. Jaký bude objem malé krychle a kolik centimetrů bude měřit její hrana? (*M. Volfová*)

Z8–I–5 Klára, Lenka a Matěj si procvičovali písemné dělení se zbytkem. Jako dělence měl každý zadáno jiné přirozené číslo, jako dělitele však měli všichni stejné přirozené číslo. Lenčin dělenec byl o 30 větší než Klářin. Matějův dělenec byl o 50 větší než Lenčin. Kláře vyšel ve výsledku zbytek 8, Lence zbytek 2 a Matějovi zbytek 4. Všichni počítali bez chyby. Jaký dělitel byl žákům zadán? (*L. Šimůnek*)

Z8–I–6 V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC a DB na sebe kolmé, jejich délka je 8 cm a délka delší základny AB je také 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku. (*M. Krejčová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1 Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

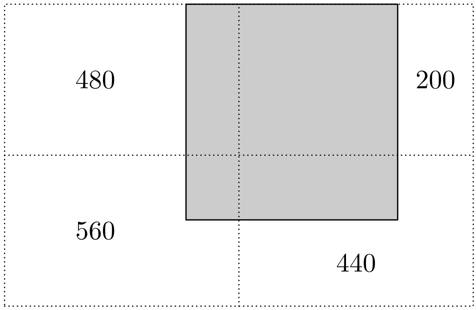
„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je…“

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek 918 cm^2. Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy. (*L. Šimůnek*)

Z9–I–2 Na obrázku jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Zapsaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2. Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy.



(*L. Šimůnek*)

Z9–I–3 Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně? (*M. Volfová*)

Z9–I–4 Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (*M. Volfová*)

Z9–I–5 Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC. Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$. (*M. Krejčová*)

Z9–I–6 Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, které společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý? (*L. Hozová*)

60. ročník Matematické olympiády, úlohy domácího kola kategorie P

Úlohy P-I-1 a P-I-2 jsou prakticky zaměřené a vaším úkolem v nich je vytvořit a odladit efektivní program v jazyce Pascal, C nebo C++. Řešení těchto dvou úloh budete odevzdávat ve formě zdrojového kódu přes webové rozhraní přístupné na stránce *http://mo.mff.cuni.cz/submit/*, kde též naleznete další informace. Odevzdaná řešení budou automaticky vyhodnocena pomocí připravených vstupních dat a výsledky vyhodnocení se krátce po odevzdání dozvíte. Pokud váš program nezíská plný počet bodů, můžete své řešení opravit a znovu odevzdat.

Úlohy P-I-3 a P-I-4 jsou teoretické, vaším úkolem je nalézt efektivní algoritmus řešící zadaný problém. Řešení úlohy se tedy skládá z popisu navrženého algoritmu, zdůvodnění jeho správnosti (funkčnosti) a odhadu časové a paměťové složitosti. Součástí řešení je i zápis algoritmu ve formě zdrojového kódu nebo pseudokódu v úloze P-I-3 a v jazyce grafového počítače v úloze P-I-4. Svá řešení můžete odevzdat ve formě souboru typu PDF přes výše uvedené webové rozhraní nebo zaslat poštou na adresu:

Matematická olympiáda – kategorie P
KSVI MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1