Vladimír Strečko

Číslo e v tvare nekonečného súčinu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 2, 10–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146357

V každém sloupci číslo z řádku 18 přepíšeme do řádku 4 pravého sousedního sloupce jako počáteční hodnotou pro vypočet v dalším kroku. To je podstata iterační metody.

Srovnáním získaných hodnot s hodnotami v Šimšově článku vidíme shodu až na některá poslední místa. Kalkulačka pracuje s pevnou desetinnou čárkou, u některých veličin se zmenšuje počet platných míst. Snižuje se tak přesnost výpočtu na posledních místech, tak nutně po určitém počtu kroků už výsledek není použitelný. Zde je to pro $i = 7$, takže končíme u $i = 6$ a $n = 192$. Podobně je tomu při výpočtu z výchozího čtverce, kde pro dolní odhad z obvodu pro $i = 6$ a $n = 128$ vychází $\pi \doteq 3{,}141\,337\,6$, ale pro $i = 7$ a $n = 256$ je $\pi \doteq 3{,}141\,606\,4$. Vlastnosti skromného výpočetního prostředku určily konec výpočtu a vybízejí zájemce obrátit se k počítači.

L i t e r a t u r a

[1] Šimša, J.: Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 1. část. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **80**, č. 1, (2005), str. 6–14.

Číslo e v tvare nekonečného súčinu

Vladimír Strečko, FHPV, Prešovská univerzita, Prešov

Abstract. The article describes a method of defining the Euler's number e by an infinite product. The limit representing the infinite product is determined by a definite integral. An approximation of the numerical value of e is given by a product of a finite number of factors.

Tento príspevok vznikol motiváciou článkom [1] v časopise MFI.

Na stredných školách sa študenti na hodinách matematiky oboznamujú s logaritmami, exponenciálnymi, logaritmickými funkciami a niektorí si osvojujú základy infinitezimálneho počtu. Eulerovo číslo e sa zavádza buď ako limita funkcie alebo ako súčet nekonečného radu,

$$\mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Cieľom príspevku je sprístupniť čitateľovi, ako možno vyjadriť číslo e v tvare súčinu

$$\mathrm{e} \doteq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{4}} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n-2}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Často je potrebné vypočítať limitu súčtu, pričom počet sčítancov neobmedzene narastá. Takéto limity v niektorých prípadoch je možné vypočítať pomocou určitého integrálu, ak daný súčet môžeme upraviť tak, aby predstavoval integrálny súčet. Napríklad, uvažujme body $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n}$ ako body delenia intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na n rovnakých častí s dĺžkou $\frac{1}{n}$. Potom pre ľubovoľnú spojitú funkciu f máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,\delta x.$$

Poznamenajme, že funkcia f nemusí byť na danom intervale ohraničená. Stačí, aby bola spojitá a existovala k nej primitívna funkcia na intervale $\langle 0, 1\rangle$.

V tomto článku je treba ukázať vzťah

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \doteq \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{4} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n-2} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Dôkaz je založený na odvodení rovnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Označme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = A.$$

Ľavú aj pravú stranu rovnosti zlogaritmujeme, teda

$$\ln A = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n},$$

pričom sme použili vzťah $\ln \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n$ platný pre postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kladnými členmi [2].

Teraz aplikujeme známu vlastnosť logaritmov súčinu

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\ln\frac{n}{n} + \ln\frac{n-1}{n} + \ln\frac{n-2}{n} + \cdots + \ln\frac{2}{n} + \ln\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

Pravá strana (1) je vlastne limitou integrálneho súčtu spojitej funkcie $y = \ln x$ v intervale $(0, 1\rangle$, s ktorým sa študenti oboznámia aspoň intuitívne [3], [4]. Presnejšie, fixujme konkrétne $n \in \mathbb{N}$ a rozdeľme interval $(0, 1\rangle$ na n rovnakých dielikov s dĺžkou $\frac{1}{n}$. Uvažujme dielik $(0, \frac{1}{n}\rangle$ a funkčnú hodnotu funkcie $y = \ln x$ v bode $\frac{1}{n}$. Potom obsah $S_1 = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$ príslušného obdĺžnika predstavuje odhad plochy ohraničenej osou x, priamkami $x = 0$, $x = \frac{1}{n}$ a grafom funkcie $y = \ln x$. Podobne, člen $S_2 = \frac{1}{n}\ln\frac{2}{n}$ vyskytujúci sa na pravej strane rovnosti (1), predstavuje odhad plochy ohraničenej osou x, priamkami $x = \frac{1}{n}$, $x = \frac{2}{n}$ a grafom funkcie $y = \ln x$. Analogicky ďalšie členy pravej strany (1) predstavujú odhady plôch prislúchajúcich vyššie uvedenému deleniu intervalu $(0, 1\rangle$ a grafu funkcie $y = \ln x$.

Pre $n \to \infty$ dostávame

$$\ln A = \int_0^1 \ln x \,\delta x = [x\ln x - x]_0^1 = -1,$$

odkiaľ

$$A = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Dostali sme vzťah, ktorý znamená, že aj Eulerovo číslo je možné písať v tvare súčinu. Poznamenajme, že daný určitý integrál sa vypočíta použitím metódy per partes, pričom $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$. Limita $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ sa vypočíta L'Hospitalovým pravidlom:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

Záverom pre zaujímavosť uveďme, že pri $n = 69$ sa prezentovaný súčin líši od skutočnej hodnoty čísla e približne o 0,016 55.

Literatura

[1] Calda, E.: Číslo π ve tvaru nekonečného součinu. *MFI* **19**, č. 6, (2010).

[2] Jarník, V.: *Diferenciální počet.* Academia, Praha, 1984.

[3] Jarník, V.: *Integrální počet.* Academia, Praha, 1984.

[4] Riečan, B., Bero, P.: *Matematika pre 4. ročník gymnázií. Diferenciálny a integrálny počet.* SPN, Bratislava, 1994.