Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda; Jaromír Šimša

O jedné vlastnosti stran a úhlů v trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 2, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146354

O jedné vlastnosti stran a úhlů v trojúhelníku

Emil Calda, MFF UK Praha

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Abstract. The article considers in detail a relatively unknown inequality taken from the books [1], [2] and [3]. The inequality is interesting as it involves lengths of the sides of a triangle as well as its interior angles (not their trigonometric values).

O délkách stran a velikostech úhlů v trojúhelníku platí celá řada tvrzení. Trojúhelníkové nerovnosti, větu o součtu vnitřních úhlů i větu o porovnání dvou stran a protilehlých vnitřních úhlů znáte již ze základní školy. V tomto článku dokážeme větu, která sice tak důležitá jako předchozí poučky není, sama o sobě je však poměrně zajímavá.

Utvoříme-li pro libovolný trojúhelník zlomek, v jehož čitateli je součet součinů délky každé jeho strany a velikosti protějšího úhlu (v radiánech) a v jehož jmenovateli je součet délek jeho stran, dostaneme číslo p ležící v intervalu $\left\langle \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi \right)$.

Při obvyklém označení stran a úhlů trojúhelníku ABC zapíšeme naše tvrzení dvojicí nerovností (např. [3, s. 33])

$$\frac{\pi}{3} \leqq p < \frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } p = \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma}{a + b + c}. \tag{1}$$

Než přistoupíme k důkazu uvedené věty, ověříme ji pro ilustraci na speciálních trojúhelnících. V případě rovnostranného trojúhelníku o straně délky a dostaneme

$$p = \frac{a \cdot \frac{1}{3}\pi + a \cdot \frac{1}{3}\pi + a \cdot \frac{1}{3}\pi}{a + a + a} = \frac{\pi}{3}.$$

V případě pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s odvěsnou délky a platí

$$p = \frac{a \cdot \frac{1}{4}\pi + a \cdot \frac{1}{4}\pi + a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\pi}{a + a + a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4},$$

takže nerovnosti (1) plynou z odhadů

$$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}.$$

Dokažme nyní nerovnost $p \geqq \frac{1}{3}\pi$ pro obecný trojúhelník ABC. Protože proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly a proti delší straně leží větší úhel, platí

$$(a-b)(\alpha-\beta) \geqq 0, \quad (b-c)(\beta-\gamma) \geqq 0, \quad (c-a)(\gamma-\alpha) \geqq 0. \qquad (2)$$

Sečtením všech tří nerovností dostaneme po úpravě

$$a(2\alpha-\beta-\gamma)+b(2\beta-\gamma-\alpha)+c(2\gamma-\alpha-\beta) \geqq 0,$$

odkud po trojím užití vztahu $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ obdržíme

$$a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi) \geqq 0,$$

neboli

$$3(a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma) \geqq (a+b+c)\cdot\pi.$$

Po vydělení obou stran kladným výrazem $3(a+b+c)$ již dostaneme kýženou nerovnost $p \geqq \frac{1}{3}\pi$. Zároveň jsme zjistili, že rovnost $p=\frac{1}{3}\pi$ nastane, právě když budou platit rovnosti ve všech třech vztazích (2), tj. jedině když trojúhelník ABC bude rovnostranný.

Přejděme nyní k důkazu nerovnosti $p < \frac{1}{2}\pi$. Protože součet délek dvou stran trojúhelníku je větší než délka strany třetí, v libovolném trojúhelníku ABC platí

$$a+b-c>0, \quad b+c-a>0, \quad c+a-b>0. \qquad (3)$$

Vynásobíme-li první nerovnost kladným číslem γ, druhou kladným číslem α, třetí kladným číslem β a pak je sečteme, dostaneme po úpravě nerovnost

$$a(\beta+\gamma-\alpha)+b(\gamma+\alpha-\beta)+c(\alpha+\beta-\gamma)>0.$$

Odtud po trojím užití vztahu $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ obdržíme postupně

$$a(\pi-2\alpha)+b(\pi-2\beta)+c(\pi-2\alpha)>0,$$

$$(a+b+c)\cdot\pi > 2(a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma),$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{a+b+c}=p.$$

Tím je dokázána nerovnost $p < \frac{1}{2}\pi$, a tedy i celá naše věta. Stojí za povšimnutí, že k jejímu důkazu jsme potřebovali pouze elementární poučky o trojúhelníku, které jsme zmínili úvodem článku.

Podívejme se nyní na odvozený výsledek ještě z jednoho hlediska. Zatímco trojúhelníky s hodnotou $p = \frac{1}{3}\pi$ existují (jak víme, jsou to právě ty, jež jsou rovnostranné), dokázaná ostrá nerovnost $p < \frac{1}{2}\pi$ vyvolává otázku, zda ji nelze obecně „vylepšit“ do tvaru $p \leqq k\pi$ s některou konstantou $k < \frac{1}{2}$. Záporná odpověď na takovou otázku vyplyne, když najdeme trojúhelníky, pro které příslušné hodnoty p budou mít od (většího) čísla $\frac{1}{2}\pi$ libovolně malé odchylky.

Vezměme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Vzhledem k rovnostem $b = a$, $\beta = \alpha$, $\gamma = \pi - 2\alpha$ a $c = 2a\cos\alpha$ pro podíl p u takového trojúhelníku platí

$$p = \frac{2a \cdot \alpha + 2a\cos\alpha \cdot (\pi - 2\alpha)}{a + a + 2a\cos\alpha} = \frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Na hodnotu p můžeme pohlížet jako na funkci proměnné α

$$p(\alpha) = \frac{\alpha + (\pi - 2\alpha)\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}, \tag{4}$$

přitom α jakožto velikost vnitřního úhlu při základně rovnoramenného trojúhelníku probíhá interval $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$. Jak plyne z dokázané věty, pro každé takové α musí platit $p(\alpha) < \frac{1}{2}\pi$. Všimněme si však, že obě „nepřípustné“ krajní hodnoty $\alpha = 0$ a $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ lze do vzorce (4) dosadit, a to se zajímavým výsledkem

$$p(0) = \frac{0 + \pi \cdot 1}{1 + 1} = \frac{\pi}{2},$$

$$p\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi + 0}{1 + 0} = \frac{\pi}{2}.$$

Protože pro proměnnou $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$, která se bude zmenšovat a blížit nule, se budou hodnoty $\pi - 2\alpha$ a $\cos\alpha$ blížit po řadě hodnotám π a 1, bude se hodnota $p(\alpha)$ podle vzorce (4) blížit hodnotě $p(0)$ rovné $\frac{1}{2}\pi$. Podobně pro proměnnou $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$, která se bude zvětšovat a blížit číslu $\frac{1}{2}\pi$, obě hodnoty $\pi - 2\alpha$ a $\cos\alpha$ se budou blížit hodnotě 0, takže se hodnota $p(\alpha)$ podle vzorce (4) bude blížit hodnotě $p\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, tedy rovněž číslu $\frac{1}{2}\pi$.

Čtenáři znalí základů matematické analýzy vědí, že taková vyjádření můžeme s použitím jednostranných limit zapsat rovnostmi

$$\lim_{\alpha\to 0+} p(\alpha) = \lim_{\alpha\to \frac{1}{2}\pi-} p(\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

které znamenají, že „limita pro α jdoucí k nule zprava“ a „limita pro α jdoucí k $\frac{1}{2}\pi$ zleva“ se rovnají, a to témuž číslu $\frac{1}{2}\pi$.

Zjistili jsme, že zkoumaná hodnota $p(\alpha)$ nabývá hodnot libovolně blízkých číslu $\frac{1}{2}\pi$ například pro rovnoramenné trojúhelníky, které jsou buď „velmi placaté“ (jejich úhly při základně jsou blízké úhlu nulovému), nebo „velmi špičaté“ (jejich úhly při základně jsou blízké úhlu pravému). Slovo *například* v poslední větě znamená, že mohou existovat i různostranné trojúhelníky s hodnotami p libovolně blízkými číslu $\frac{1}{2}\pi$. Ty však hledat nemusíme; už totiž máme jistotu, že nerovnost $p < \frac{1}{2}\pi$ nelze výše naznačeným způsobem obecně vylepšit.

V poslední části článku nabídneme ještě jeden pohled na dokázané nerovnosti (1). Zkoumaná hodnota p přiřazená libovolnému trojúhelníku ABC se dá zapsat ve tvaru

$$p = \frac{a}{a+b+c}\cdot\alpha + \frac{b}{a+b+c}\cdot\beta + \frac{c}{a+b+c}\cdot\gamma.$$

Zavedeme-li proto tzv. *normované váhové koeficienty*

$$\lambda_A = \frac{a}{a+b+c},\quad \lambda_B = \frac{b}{a+b+c},\quad \lambda_C = \frac{c}{a+b+c}, \tag{5}$$

můžeme říci, že hodnota $p = \lambda_A\alpha + \lambda_B\beta + \lambda_C\gamma$ je *vážený aritmetický průměr* trojice čísel α, β, γ.*) Všimněme si, že obyčejný (tj. nevážený) aritmetický průměr trojice velikostí vnitřních úhlů má pro všechny trojúhelníky stejnou hodnotu

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Jak z tohoto pohledu vysvětlit naši větu? Při přechodu od obyčejného k váženému průměru se jeho hodnota pro trojici čísel α, β, γ samozřejmě

*) Každý školák dobře ví, že výsledná pololetní známka (nejen z matematiky) je často váženým průměrem všech známek dosažených z písemek různých druhů, ústních zkoušení apod. Váhové koeficienty přitom uvážlivě volí vyučující.

změní, protože se „posílí“ role úhlu s největším váhovým koeficientem. Ze zlomků (5) vidíme, že největší váhový koeficient bude mít ten vnitřní úhel, proti němuž leží největší strana, tedy největší ze tří úhlů trojúhelníku. Naším vážením se tedy průměr hodnot α, β, γ „posune“ k větší hodnotě. Tak jsme volnější úvahou odůvodnili nerovnost $p \geqq \frac{1}{3}\pi$; přesný důkaz to však není, ten jste si přečetli v části článku s nerovnostmi (2).

Zato důkaz nerovnosti $p < \frac{1}{2}\pi$ lze v novém světle podat velmi přesně a elegantně. Známé a dříve uvedené trojúhelníkové nerovnosti (3) totiž okamžitě vedou k závěru, že každý z váhových koeficientů λ_A, λ_B, λ_C určených vztahy (5) je menší než číslo $\frac{1}{2}$. Proto pro zkoumaný vážený průměr p platí

$$p = \lambda_A\alpha + \lambda_B\beta + \lambda_C\gamma < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Čtenáře, které naše téma zaujalo, vybízíme k tomu, aby sami zkoumali, jak na množině všech trojúhelníků ABC (při obvyklém označení jeho prvků) vypadá interval hodnot váženého průměru $p = \lambda_A\alpha + \lambda_B\beta + \lambda_C\gamma$ s některou jinou trojicí váhových koeficientů. Za koeficient λ_A můžeme například volit jeden ze zlomků

$$\frac{t_a}{t_a + t_b + t_c}, \quad \frac{v_b + v_c}{2(v_a + v_b + v_c)}, \quad \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

a podobně (fantazii se meze nekladou), dvojici koeficientů λ_B, λ_C vždy zadáme cyklicky analogickými vzorci. Lze rovněž hledat možné hodnoty vážených průměrů s narušenou symetrií váhových koeficientů, například zvolit $\lambda_A = \frac{1}{2}$ a $\lambda_B = \lambda_C = \frac{1}{4}$.

Poslední úkol byste měli rychle zvládnout, nemýlíme se?

Literatura

[1] Bottema, O.: *Geometric Inequalities.* Wolters-Nordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[2] Prasolov, V. V.: *Zadači po planimetrii.* (5. přepracované a doplněné vydání) MCMNO, Moskva, 2006.

[3] Horák, S.: *Nerovnosti v trojúhelníku.* ŠMM č. 57, Mladá fronta, Praha, 1986.