Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 1, 55–60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146352`

NAŠE SOUTĚŽ

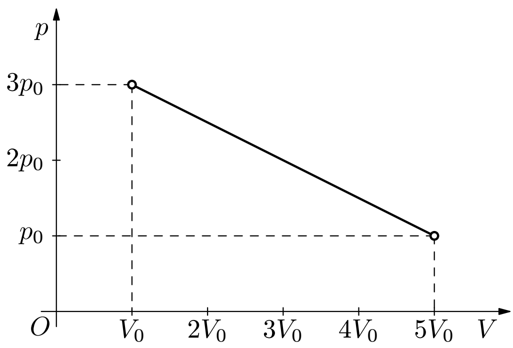
V předchozím ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních byla znovu otevřena rubrika *Naše soutěž*. V každém čísle byly vždy zadány dvě úlohy, jedna matematická, druhá fyzikální. V tomto čísle jsou předloženy další dvě úlohy. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce vaše řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů. Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulý i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům se bude periodicky (ročně) zasílat matematická literatura. Nyní tedy předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. května 2010* na adresu redakce.

Úloha 9. Dokažte nerovnost:

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \cdots + \log_{2009} 2010 > 2008 \cdot \sqrt[2008]{10}$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 10. Ideální plyn má při objemu V_0 tlak p_0 a termodynamickou teplotu T_0. Při rozepnutí plynu z objemu V_0 na objem $5V_0$ jeho tlak lineárně klesne z $3p_0$ na p_0 (obr. 1).



Obr. 1

Určete při tomto ději minimální a maximální termodynamickou teplotu. (*Josef Jírů*)

Řešení úloh z čísla 3/2009

Úloha 5.

a) Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n se součet číslic čísla $n^2 + n^4 + n^6$ nerovná číslu $2^2 + 4^2 + 6^2$.

b) Dokažte, že pro žádné přirozené číslo n se součet číslic čísla n^2 nerovná číslu 2009. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: V obou částech úlohy využijeme poznatku, že při dělení třemi dává každé přirozené číslo stejný zbytek jako jeho ciferný součet.

a) Číslo $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$ dává při dělení třemi zbytek 2. Rozeberme nyní případy, jaké zbytky při dělení třemi dává číslo $n^2 + n^4 + n^6$ pro různé hodnoty přirozeného čísla n.

Je-li číslo n dělitelné třemi, je číslo $n^2 + n^4 + n^6$ také dělitelné třemi, proto i jeho ciferný součet je dělitelný třemi. Má-li číslo n po dělení třemi zbytek 1, mají čísla n^2, n^4, n^6 po dělení třemi také zbytek 1, takže číslo $n^2 + n^4 + n^6$ je dělitelné třemi a i jeho ciferný součet je dělitelný třemi. Má-li číslo n po dělení třemi zbytek 2, mají čísla n^2, n^4, n^6 po dělení třemi zbytek 1, takže číslo $n^2 + n^4 + n^6$ je dělitelné třemi a i jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Znamená to tedy, že pro žádné přirozené číslo n nemůže být číslo $n^2 + n^4 + n^6$ rovno číslu $2^2 + 4^2 + 6^2$.

b) Číslo 2009 dává při dělení třemi zbytek 2. Rozeberme nyní případy, jaké zbytky při dělení třemi dává číslo n^2 pro různé hodnoty přirozeného čísla n.

Je-li číslo n dělitelné třemi, je číslo n^2 i jeho ciferný součet dělitelný třemi. Má-li číslo n po dělení třemi zbytek 1, má číslo n^2 i jeho ciferný součet po dělení třemi zbytek 1. Má-li číslo n po dělení třemi zbytek 2, má číslo n^2 i jeho ciferný součet po dělení třemi zbytek 1.

Znamená to tedy, že pro žádné přirozené číslo n nemůže být ciferný součet čísla n^2 roven číslu 2009.

Úloha 6. Na těleso o hmotnosti m, které se nacházelo v klidu v bodě A, začala v čase $t = 0$ s působit stálá síla $\boldsymbol{F}_1$, která na těleso působila po dobu t_1. Potom působila na těleso stálá síla $\boldsymbol{F}_2$ opačného směru než $\boldsymbol{F}_1$. Působila rovněž po dobu t_1, takže v čase $2t_1$ při průchodu bodem A mělo těleso rychlost $\boldsymbol{v}_2$. Hmotnost tělesa m, dobu t_1 a velikost rychlosti $\boldsymbol{v}_2$ známe.

a) Určete maximální vzdálenost s tělesa od bodu A v časovém intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$ a dobu $t_2 \in \langle 0; 2t_1 \rangle$, za kterou se těleso do této vzdálenosti dostane.

b) Určete velikosti sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$.
Úlohy a), b) řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty $t_1 = 30$ s, $m = 10$ kg, $v_2 = 72\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

c) Pro dané hodnoty sestrojte graf závislosti velikosti rychlosti tělesa na čase v intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$.

d) Z grafu sestrojeného v úloze c) určete maximální vzdálenost tělesa od bodu A. Takto určenou hodnotu porovnejte s hodnotou vypočtenou v úloze a).

e) Určete průměrnou rychlost tělesa v časovém intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$. Vypočtenou hodnotu průměrné rychlosti vyznačte v grafu úlohy c).

Ve všech částech úlohy považujte těleso za hmotný bod.

(*Přemysl Šedivý*)

Řešení: (podle autora)

a) Ze zadání plyne, že bod koná nejprve rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb se stálým zrychlením o velikosti $a_1 = \frac{F_1}{m}$ a v čase t_1 dosáhne rychlosti $v_1 = a_1 t_1$. Potom koná rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením opačného směru o velikosti $a_2 = \frac{F_2}{m}$. Maximální vzdálenosti s dosáhne v čase $t_1 + t_2$, kdy je jeho rychlost nulová. Následuje rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením o velikosti a_2 zpět do bodu A. Platí

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_1 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + a_1 t_1 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2, \\
s &= \frac{1}{2}a_2 (t_1 - t_2)^2, \\
v_2 &= a_2 (t_1 - t_2), \\
a_2 t_2 &= a_1 t_1
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy rovnic dostáváme postupně:

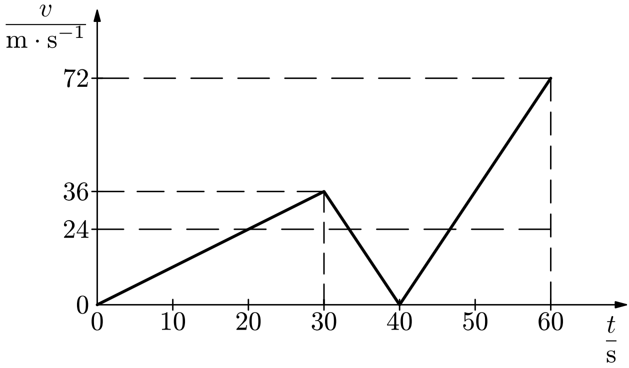
$$
t_2 = \frac{1}{3}t_1, \quad a_1 = \frac{v_2}{2t_1}, \quad a_2 = \frac{3v_2}{2t_1}, \quad v_1 = a_1 t_1 = \frac{1}{2}v_2, \quad s = \frac{1}{3}v_2 t_1.
$$

Pro dané hodnoty: $t_2 = 10$ s, $s = 720$ m.

b) $F_1 = \dfrac{mv_2}{2t_1}, \quad F_2 = \dfrac{3mv_2}{2t_1}.$

Pro dané hodnoty: $F_1 = 12$ N, $F_2 = 36$ N.

c) Graf závislosti velikosti rychlosti na čase je na obr. 2.



Obr. 2

d) Vzdálenost s je číselně rovna obsahu trojúhelníku omezeného grafem rychlosti v intervalu $\langle 0; t_1 + t_2\rangle$:

$$\{s\} = \frac{40 \cdot 36}{2} = 720, \qquad s = 720\ \mathrm{m},$$

nebo je také číselně rovna obsahu trojúhelníku omezeného grafem rychlosti v intervalu $\langle t_1 + t_2; 2t_1\rangle$, tj.

$$\{s\} = \frac{20 \cdot 72}{2} = 720, \qquad s = 720\ \mathrm{m}.$$

e) Průměrná rychlost:

$$v_p = \frac{2s}{2t_1} = \frac{1}{3}v_2 = 24\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Řešení: (podle M. Bucháčka)

Označme směr působení síly $\boldsymbol{F}_1$ jako kladný. V časovém intervalu $(0; t_1)$ se těleso pohybuje se zrychlením o velikosti $a_1 = \frac{F_1}{m}$, rychlost pohybu tělesa tedy je

$$v = \frac{F_1}{m}t,$$

v čase t je vzdálenost tělesa od bodu A rovna

$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t^2.$$

V časovém intervalu $(t_1; 2t_1)$ se těleso pohybuje se zrychlením o velikosti $a_2 = -\frac{F_2}{m}$. V čase t se těleso pohybuje rychlostí

$$v = \frac{F_1}{m}t_1 - \frac{F_2}{m}(t - t_1)$$

a nachází se ve vzdálenosti

$$s(t) = \frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t_1^2 + \frac{F_1}{m}t_1(t - t_1) - \frac{1}{2}\frac{F_2}{m}(t - t_1)^2$$

od bodu A. Podle zadání platí

$$s(2t_1) = \frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t_1^2 + \frac{F_1}{m}t_1^2 - \frac{1}{2}\frac{F_2}{m}t_1^2 = 0, \qquad (1)$$

$$v(2t_1) = \frac{F_1}{m}t_1 - \frac{F_2}{m}t_1 = -v_2. \qquad (2)$$

Z rovnice (1) dostaneme $F_2 = 3F_1$. Po dosazení za F_2 do rovnice (2) vyjádříme

$$F_2 - F_1 = 2F_1 = \frac{mv_2}{t_1},$$

$$F_1 = \frac{mv_2}{2t_1} = 12\ \mathrm{N},$$

$$F_2 = \frac{3}{2}\frac{mv_2}{t_1} = 36\ \mathrm{N}.$$

Těleso dosáhne maximální vzdálenosti v čase t_2, který určíme užitím první derivace dráhy s podle času t, kterou pak položíme rovnou nule, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t_1^2 + \frac{F_1}{m}t_1(t - t_1) - \frac{1}{2}\frac{F_2}{m}(t - t_1)^2\right] = 0,$$

$$\frac{F_1}{m}t_1 - \frac{F_2}{m}(t_2 - t_1) = 0,$$

z čehož

$$t_2 = \left(\frac{F_1}{F_2} + 1\right) t_1 = \frac{4}{3} t_1 = 40 \text{ s}.$$

O tom, že vzdálenost v čase t_2 je maximální, je možno se přesvědčit užitím druhé derivace; v tomto případě stačí určit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{F_1}{m}t_1 - \frac{F_2}{m}(t - t_1)\right] = -\frac{F_1}{m} < 0.$$

Těleso tedy bude v maximální vzdálenosti

$$s_{\max} = \frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t_1^2 + \frac{F_1}{m}\frac{t_1^2}{3} - \frac{1}{2}\frac{F_2}{m}\frac{t_1^2}{9} = \left(\frac{5}{6}F_1 - \frac{1}{18}F_2\right)\frac{t_1^2}{m} = \frac{1}{3}v_2 t_1 = 720 \text{ m}.$$

Graf závislosti rychlosti na čase je znázorněn na obr. 1 v autorském řešení. Z grafu je vidět, že lze snadno odečíst čas $t_2 = 40$ s, kdy je velikost rychlosti rovna nule. Průměrnou rychlost potom určíme ze vztahu

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{2s_{\max}}{2t_1} = \frac{1}{3}v_2 = 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Stav soutěže po 6 soutěžních úlohách

Martin Bucháček (Gymnázium Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů

Pokračování ze strany 61

jsou i české osobnosti, jako například matematik a pedagog Stanislav Vydra (Bolzanův učitel matematiky) a jeho nástupce matematik Josef Jandera, dále pak česká fyzikální chemička Jarmila Petrová, která se zabývala vlivem ionizačního záření na krvetvorbu.

Kniha je napsána čtivě a lze ji doporučit všem, kteří se zajímají o historii přírodních a společenských věd. Je rozšířením informací obsažených v učebnicích fyziky, přírodopisu a dějepisu středních škol. Kniha má 276 stran. Náklad 200 výtisků. Knihu je možné zakoupit či objednat v prodejně technické literatury ČVUT v Praze 6, v Bílé ulici č. 6.

Zdeněk Janout