Barbora Havířová

Co možná nevíte o čtyřúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 85 (2010), No. 1, 1–12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146338`

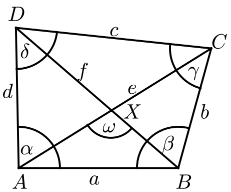
Co možná nevíte o čtyřúhelníku

Barbora Havířová, Gymnázium Elgartova, Brno

Abstract. Many propositions about triangles are discussed in the school mathematics. There are formulas for computing the area of a triangle and relations between its sides and internal angles (Law of Sines, Law of Cosines). Using this knowledge, analogous formulas for quadrangles can be proved. The paper is not only the overview of the formulas, but the proofs are also included, as it is understanding of proofs that improves the skills necessary in geometry.

Ve školské matematice je běžně probírána celá řada tvrzení o trojúhelnících. Známe různé vzorce pro výpočet obsahu, vztahy mezi stranami a vnitřními úhly (sinová a kosinová věta). Využijeme-li těchto znalostí, můžeme dokázat obdobná užitečná tvrzení pro čtyřúhelníky, na která v hodinách matematiky ve škole nezbývá čas.

V celém článku je použito (a na obr. 1 znázorněno) obvyklé značení prvků v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$: délky stran AB, BC, CD, DA jsou označeny po řadě a, b, c, d, délky úhlopříček $|AC| = e$, $|BD| = f$, velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C, D po řadě α, β, γ, δ. Dále $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ je polovina obvodu a S obsah čtyřúhelníku. Průsečík úhlopříček je v celém článku značen písmenem X a velikost úhlu AXB písmenem ω.



Obr. 1

Nejprve si můžete všechny vzorce v očíslovaných větách prohlédnout. Pokud se pak začtete do jejich důkazů, které uvádíme v podrobné a úplné podobě, zdokonalíte se jistě v metodách, které při geometrických výpočtech často potřebujeme.

Přehled poznatků zahájíme elegantním vzorcem pro výpočet obsahu čtyřúhelníku.

Věta 1. *V libovolném čtyřúhelníku ABCD platí*

$$S = \frac{1}{2} ef \sin \omega.$$

Dříve než se pustíme do důkazu, uvědomme si, že siny vedlejších úhlů se rovnají, a tedy

$$\sin |\sphericalangle AXB| = \sin |\sphericalangle BXC| = \sin |\sphericalangle CXD| = \sin |\sphericalangle DXA| = \sin \omega.$$

Obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ určíme jako součet obsahů trojúhelníků ABX, BCX, CDX a DAX, vyjádřených pomocí dvou stran a jimi sevřeného úhlu, a pomocí vytýkání vzorec odvodíme:

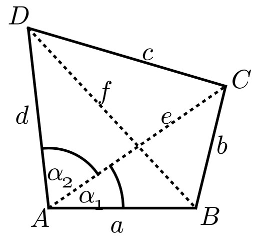
$$\begin{aligned}
S &= S_{ABX} + S_{BCX} + S_{CDX} + S_{DAX} = \\
&= \frac{1}{2} |AX|\,|BX| \sin \omega + \frac{1}{2} |BX|\,|CX| \sin \omega + \\
&\qquad + \frac{1}{2} |CX|\,|DX| \sin \omega + \frac{1}{2} |DX|\,|AX| \sin \omega = \\
&= \frac{1}{2} \big[|AX|(|BX| + |DX|) + |CX|(|BX| + |DX|) \big] \sin \omega = \\
&= \frac{1}{2} \big[(|AX| + |CX|)\,(|BX| + |DX|) \big] \sin \omega = \frac{1}{2} ef \sin \omega
\end{aligned}$$

Známe-li kromě délek úhlopříček také délky stran čtyřúhelníku, můžeme pro určení jeho obsahu využít následující větu.

Věta 2. *Pro libovolný čtyřúhelník ABCD platí*

$$(4S)^2 = 4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2.$$

Vzorec tentokrát odvodíme tak, že vyjdeme z pravé strany rovnosti a po několika úpravách obdržíme stranu levou. Označme velikosti úhlů $\alpha_1 = |\sphericalangle BAC|$, $\alpha_2 = |\sphericalangle CAD|$ (obr. 2).



Obr. 2

Využijeme kosinovou větu postupně v trojúhelnících ABC, ACD, ABD:

$$\begin{aligned} b^2 &= e^2 + a^2 - 2ea\cos\alpha_1 \\ c^2 &= e^2 + d^2 - 2ed\cos\alpha_2 \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

Dosaďme nyní do pravé strany dokazované rovnosti za b^2, c^2, f^2 a postupně upravujme (využijeme přitom součtový vzorec $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2$):

$$\begin{aligned} &4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = \\ &= 4e^2(a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 + \alpha_2)) - \\ &\qquad - (a^2 - a^2 - e^2 + 2ea\cos\alpha_1 + e^2 + d^2 - 2ed\cos\alpha_2 - d^2)^2 = \\ &= 4e^2\big[a^2 + d^2 - 2ad\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \\ &\qquad\qquad - a^2\cos^2\alpha_1 - d^2\cos^2\alpha_2 + 2ad\cos\alpha_1\cos\alpha_2\big] = \\ &= 4e^2\big[a^2(1 - \cos^2\alpha_1) + d^2(1 - \cos^2\alpha_2) - \\ &\qquad - 2ad\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + 2ad\cos\alpha_1\cos\alpha_2\big] = \\ &= 4e^2(a^2\sin^2\alpha_1 + d^2\sin^2\alpha_2 + 2ad\sin\alpha_1\sin\alpha_2) = \\ &= 4e^2(a\sin\alpha_1 + d\sin\alpha_2)^2 = 16\left(\frac{1}{2}ea\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}ed\sin\alpha_2\right)^2 = \\ &= 16(S_{ABC} + S_{ACD})^2 = (4S)^2 \end{aligned}$$

Porovnáním vzorců pro obsah z obou dokázaných vět obdržíme po snadné úpravě důležitý vztah mezi délkami stran a úhlopříček obecného čtyřúhelníku:

$$\begin{aligned} 4e^2f^2\sin^2\omega &= 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\ (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 &= 4e^2f^2(1 - \sin^2\omega) \\ (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 &= 4e^2f^2\cos^2\omega \\ |a^2 - b^2 + c^2 - d^2| &= 2ef|\cos\omega| \end{aligned}$$

V uvedeném vztahu můžeme odstranit absolutní hodnoty, když si promyslíme jiný postup odvození využívající kosinové věty, který nyní uvedeme.

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle CXD| = \omega$$

(jedná se o vrcholové úhly) a

$$|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle DXA| = 180^\circ - \omega$$

(vedlejší úhly). Uvažme nyní, že $\cos(180^\circ - \omega) = -\cos\omega$ a použijme kosinovou větu v trojúhelnících AXB, BXC, CXD a DXA:

$$\begin{aligned}
&a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = \\
&= |AX|^2 + |BX|^2 - 2|AX|\,|BX|\,\cos\omega - \\
&\qquad - |BX|^2 - |CX|^2 - 2|BX|\,|CX|\,\cos\omega + \\
&\qquad + |CX|^2 + |DX|^2 - 2|CX|\,|DX|\,\cos\omega - \\
&\qquad - |DX|^2 - |AX|^2 - 2|DX|\,|AX|\,\cos\omega = \\
&= -(|AX|\,|BX| + |CX|\,|DX| + |BX|\,|CX| + |DX|\,|AX|)\,2\cos\omega = \\
&= -\big[|AX|\,(|BX| + |DX|) + |CX|\,(|BX| + |DX|)\big]\,2\cos\omega = \\
&= -(|AX| + |CX|)\,(|BX| + |DX|)\,2\cos\omega = \\
&= -2\,|AC|\,|BD|\,\cos\omega = -2ef\cos\omega
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali upřesněný vzorec bez absolutních hodnot. Pro lepší přehled ho zopakujeme v následující větě.

Věta 3. *Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí*

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = -2ef\cos\omega.$$

Z posledního tvrzení okamžitě plyne velmi zajímavý výsledek.

Věta 4. *Úhlopříčky AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí*

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Další pozoruhodné tvrzení, které nyní uvedeme a vzápětí dokážeme, se opět týká obsahu obecného čtyřúhelníku a jistě vám připomene Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku, který se používá, známe-li délky stran trojúhelníku.

Věta 5 (Brahmaguptova nerovnost). *Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí*

$$S \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

přitom rovnost nastává právě pro čtyřúhelník, který je tětivový.[1)]

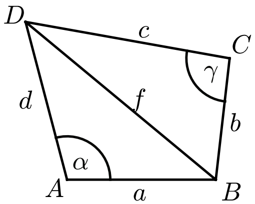
Místo uvedené nerovnosti dokážeme rovnou silnější výsledek, ze kterého navíc okamžitě vyplyne, že konvexní čtyřúhelník s největším obsahem při zadaných délkách stran je čtyřúhelník tětivový (vepsaný do kružnice).

Věta 6. *Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí*

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

Obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ bude vhodné vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků ABD a BCD (obr. 3), tedy ve tvaru

$$S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma.$$



Obr. 3

Pokračujme dále umocněním obou stran rovnosti na druhou a podobnými úpravami jako v předchozím důkazu („goniometrická jednička“, součtový vzorec pro funkci kosinus, navíc vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu, umocnění dvojčlenu na druhou, rozklad rozdílu druhých

1) Brahmagupta (598–670), indický matematik a astronom. Více o Brahmaguptovi viz např. [1], o uvedených vztazích viz např. [2].

mocnin na součin) vedeni snahou nahradit hodnoty $\sin\alpha$ a $\sin\gamma$ hodnotou $\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$. Jde tedy o tyto postupné úpravy:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{a^2d^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{b^2c^2}{4}\sin^2\gamma + \frac{abcd}{2}\sin\alpha\sin\gamma = \\
&= \frac{a^2d^2}{4}(1-\cos^2\alpha) + \frac{b^2c^2}{4}(1-\cos^2\gamma) + \\
&\qquad + \frac{abcd}{2}\big[\cos\alpha\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma)\big] = \\
&= \frac{a^2d^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} - \frac{a^2d^2}{4}\cos^2\alpha - \frac{b^2c^2}{4}\cos^2\gamma + \\
&\qquad + \frac{abcd}{2}\cos\alpha\cos\gamma - \frac{abcd}{2}\left[2\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) - 1\right] = \\
&= \frac{a^2d^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} - \frac{a^2d^2}{4}\cos^2\alpha - \frac{b^2c^2}{4}\cos^2\gamma + \\
&\qquad + \frac{abcd}{2}\cos\alpha\cos\gamma - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \frac{abcd}{2} = \\
&= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{4}(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).
\end{aligned}$$

Použijeme-li nyní pro vyjádření výrazů $ad\cos\alpha$ a $bc\cos\gamma$ kosinovou větu v trojúhelnících ABD a BCD ve tvaru rovností

$$\begin{aligned}
f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha, \\
f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma,
\end{aligned}$$

dostaneme pro hodnotu S^2 dalšími postupnými úpravami:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4}(ad+bc)^2 - \frac{1}{4}(ad\cos\alpha - bc\cos\gamma)^2 - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}\big[4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2\big] - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16}(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \cdot \\
&\qquad \cdot (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left[(b+c)^2 - (a-d)^2\right]\left[(a+d)^2 - (b-c)^2\right] - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}(b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c) - \\
&\qquad - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \ abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Tím je vzorec z věty 6 odvozen.

V tětivovém čtyřúhelníku platí $\alpha + \gamma = 180°$, takže hodnota kosinu v posledním výrazu je nulová, a proto má právě odvozený vzorec pro obsah jednoduchý tvar nazývaný *Brahmaguptův vzorec*

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Ve dvojstředovém čtyřúhelníku (čtyřúhelníku, jemuž lze opsat i vepsat kružnici) je navíc

$$a + c = b + d = s,$$

proto pro jeho obsah dostáváme elegantní vzorec

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Kosinová věta pro trojúhelník je velmi dobře známá. Málokdo však ví, že také pro obecný čtyřúhelník existuje stejnojmenná věta.

Věta 7 (Kosinová věta pro čtyřúhelník (Bretschneiderova věta)). *Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ platí*

$$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

O platnosti uvedeného tvrzení se můžete přesvědčit sami, když vzorec z věty 6 postupně upravujete:

$$S^2 = \frac{1}{16}\left[4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2\right] - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2d^2+b^2c^2) - \frac{1}{16}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 + \frac{abcd}{2} - {} - abcd\frac{1+\cos(\alpha+\gamma)}{2}$$

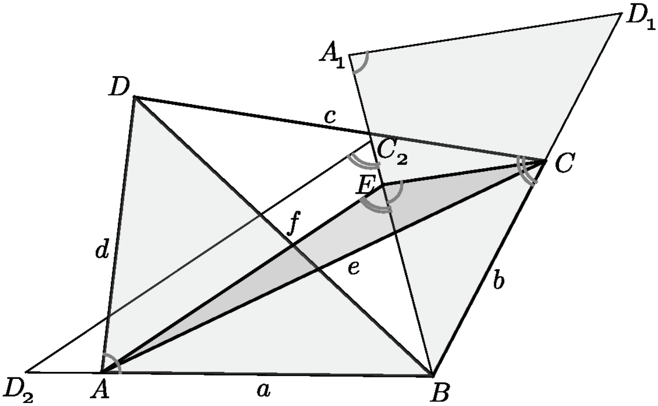
$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2d^2+b^2c^2) - \frac{1}{16}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - \frac{abcd}{2}\cos(\alpha+\gamma).$$

Výsledek pak porovnáte s vyjádřením hodnoty S^2 ze vzorce z věty 2.

Pro zajímavost dodejme, že kosinovou větu pro čtyřúhelník $ABCD$ je možné zapsat v podobě kosinové věty pro trojúhelník o stranách ef, ac, bd a vnitřním úhlu $\alpha+\gamma$:

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd)\cos(\alpha+\gamma).$$

Takový trojúhelník skutečně lze eukleidovsky sestrojit z daného čtyřúhelníku (při zvolené jednotce délky, bez ní jsou ef, ac, bd obsahy, nikoliv délky). Taková konstrukce nás nás může přivést k novému důkazu posuzované kosinové věty, založeném na obr. 4, který nyní popíšeme.



Obr. 4

Čtyřúhelník $ABCD$ je rozdělen na trojúhelníky ABD a BCD, které jsou otočeny kolem bodu B do poloh A_1BD_1, resp. BC_2D_2, a to tak, že bod D_1 leží na polopřímce BC a bod D_2 leží na polopřímce BA. Body B, A_1, C_2 nutně leží v přímce, neboť

$$|\sphericalangle D_2BC_2| + |\sphericalangle A_1BD_1| = |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ABC|.$$

Na této přímce je dále zvolen bod E tak, že $AE \parallel D_2C_2$. Trojúhelníky BC_2D_2 a BEA jsou podobné, proto

$$|BE| = \frac{|AB|\,|BC_2|}{|BD_2|} = \frac{ab}{f}.$$

Pokud bychom však zvolili na polopřímce BA_1 bod F tak, aby platilo $CF \parallel D_1A_1$, pak by analogicky z podobnosti trojúhelníků BD_1A_1 a BCF vyplynulo $|BF| = \frac{|BC||BA_1|}{|BD_1|} = \frac{ba}{f}$, a tedy $E = F$. Proto také $CE \parallel D_1A_1$. Dopočítáme ještě délky

$$|EA| = \frac{|AB|\,|C_2D_2|}{|D_2B|} = \frac{ac}{f}, \qquad |EC| = \frac{|BC|\,|A_1D_1|}{|BD_1|} = \frac{bd}{f},$$

abychom využili kosinovou větu v trojúhelníku ACE, o němž víme, že jeho vnitřní úhel u vrcholu E má velikost $\alpha+\gamma$, případně $360° - (\alpha+\gamma)$. Protože kosiny obou hodnot jsou stejné, platí

$$e^2 = \left(\frac{ac}{f}\right)^2 + \left(\frac{bd}{f}\right)^2 - 2\,\frac{ac}{f}\,\frac{bd}{f}\cos(\alpha+\gamma).$$

Vynásobením obou stran rovnosti výrazem f^2 okamžitě získáme kýženou kosinovou větu pro čtyřúhelník.

Možná jste si povšimnuli, že ve vzorcích z dokázaných vět 6 a 7 vystupují pouze úhly α a γ. Tato asymetrie je však pouze zdánlivá, neboť díky rovnosti $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ platí současně

$$\cos(\alpha+\gamma) = \cos(\beta+\delta), \qquad \cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos^2\frac{\beta+\delta}{2}.$$

S přibývajícím počtem dokázaných vztahů můžeme další odvozovat pouhou úpravou nebo kombinací předchozích. Příkladem je právě dokázaná kosinová věta pro čtyřúhelník nebo následující velice důležitá a známá nerovnost.

Věta 8 (Ptolemaiova nerovnost). *V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ platí*

$$ef \leq ac + bd,$$

přitom rovnost nastává právě pro čtyřúhelník, který je tětivový.[2)]

Abychom mohli nerovnost dokázat, využijeme již odvozenou kosinovou větu pro čtyřúhelník. Postupnými úpravami dotyčné rovnosti dostáváme

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma),$$

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) + 2abcd,$$

$$e^2f^2 = (ac + bd)^2 - 4abcd\cos^2\frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Protože na pravé straně odečítáme od druhé mocniny nezápornou hodnotu, platí

$$e^2f^2 \leq (ac + bd)^2,$$

neboli

$$ef \leq ac + bd.$$

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když

$$\cos\frac{\alpha + \gamma}{2} = 0,$$

neboli $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

Poznamenejme, že Ptolemaiova nerovnost plyne přímo také z konstrukce na obr. 4, konkrétně z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku ACE. Jak jsme dříve zjistili, jeho strany mají délky v poměru $(ac) : (bd) : (ef)$.

Na závěr článku uvedeme ještě vzorec, který umožňuje ze znalosti délek stran a úhlopříček čtyřúhelníku vypočítat vzdálenost středů jeho úhlopříček.

Věta 9 (Eulerův vzorec) [3)] *Pro vzdálenost x středů úhlopříček libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ platí*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4x^2.$$

[2)] Klaudios Ptolemaios (asi 85–165), řecký astronom, matematik, fyzik a zeměpisec. Více o Ptolemaiovi viz např. [3], o Ptolemaiově nerovnosti viz např. [4], [5] a [6].

[3)] Vzorec odvodil Euler jako důsledek jiného tvrzení, viz [7].

V důkazu využijeme opakovaně známý vzorec pro délku těžnice trojúhelníku, podle kterého při obvyklém značení prvků v trojúhelníku ABC platí

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

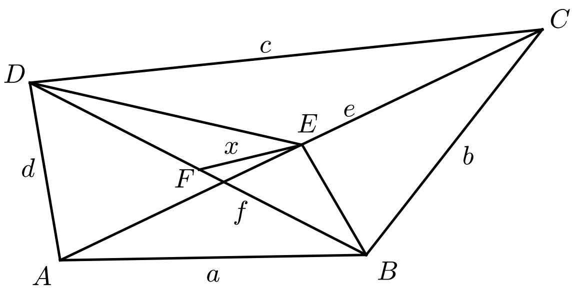
Označme E střed úhlopříčky AC a F střed úhlopříčky BD čtyřúhelníku $ABCD$, takže $x = |EF|$ (obr. 5). Pak v trojúhelnících ABC, ACD a DBE pro příslušné těžnice BE, DE resp. EF platí

$$\begin{aligned}
|BE|^2 &= \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - e^2),\\
|DE|^2 &= \frac{1}{4}(2c^2 + 2d^2 - e^2),\\
x^2 &= \frac{1}{4}(2|BE|^2 + 2|DE|^2 - f^2).
\end{aligned}$$

Zbývá dosadit z prvních dvou rovností do třetí:

$$x^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}e^2 + c^2 + d^2 - \frac{1}{2}e^2 - f^2).$$

Po zřejmé úpravě obdržíme dokazovaný vzorec.



Obr. 5

V případě, kdy bod E leží na úhlopříčce BD, nelze mluvit o trojúhelníku DBE, ale použité vyjádření x^2 přesto platí. Ověříme to dosazením $f = |BE| + |DE|$, neboť po úpravě získáme

$$x = \frac{1}{2}\,||BE| - |DE||\,,$$

což je skutečně platná rovnost.

Dokázaný Eulerův vzorec má jeden důležitý důsledek, který možná znáte ze školy. Jak víme, daný čtyřúhelník je rovnoběžník, právě když jeho středy úhlopříček splývají. To podle dokázaného vzorce nastane, právě když

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2.$$

V tom případě ovšem platí současně $a = c$ a $b = d$, což nás přivádí k tzv. rovnoběžníkové rovnosti

$$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2.$$

Všechna tvrzení uvedená v našem textu je možné použít i pro nekonvexní čtyřúhelníky, pouze jejich důkazy se někdy liší ve znaménku u některého výrazu. Článek vám může posloužit nejen jako přehled zajímavých a důležitých vzorců pro čtyřúhelník, ale také jako pomůcka při důkazech podobných tvrzení a řešení nejrůznějších planimetrických úloh.

Literatura

[1] *Brahmagupta.* Wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta`, [on line 10. 3. 2009].

[2] *Brahmagupta's formula.* Wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta's_formula`, [on line 24. 2. 2009].

[3] *Ptolemy.*Wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy`, [on line 14. 3. 2009].

[4] Leischner, P.: Ptolemaiova věta. *Matematika–fyzika–informatika* **15** (2005), s. 129–135.

[5] Leischner, P.: Ptolemaiova nerovnost. *Matematika–fyzika–informatika* **15** (2006), s. 385–392.

[6] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie.* Pedagogická fakulta UK, Praha, 2009, s. 110.

[7] Sandifer, E.: *How Euler Did It — The Euler-Pythagoras theorem.* The Mathematical Association of America, `http://www.maa.org/editorial/euler/How Euler Did It 15 Euler-Pythagoras.pdf`, [on line 14. 3. 2009].

[8] Šťastná, B.: Kosinová věta pro čtyřúhelník. In *5. matematický workshop*, FAST VUT, Brno, 2006, s. 107–108.