Pavel Calábek; Martin Panák

3. Středoevropská matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 4, 47–51

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146333`

Závěry

Výsledky 40. MFO ukázaly, že členové českého družstva byli na soutěž opět dobře a pečlivě vybráni. Soutěžící se na soutěž vcelku velmi dobře připravili. Ačkoliv se může zdát, že po minulých dvou mimořádně úspěšných ročnících zaznamenala česká delegace ústup z předních pozic, podle našeho názoru si stále udržela vysoký standard. Navíc došlo v českém družstvu k jakési „generační výměně“, členem letošního týmu nebyl ani jeden z velmi úspěšných soutěžících z minulosti. Za vyzdvihnutí stojí velká vyrovnanost českých studentů (mezi nejlepším a „nejhorším“ jsou jen 4 body rozdílu). Přistupuje k tomu i fakt, že všichni získali medaili. Dva z úspěšných medailistů mají navíc šanci se zúčastnit i příští MFO, která proběhne v červenci 2010 v chorvatském Záhřebu. V přípravě na MFO je třeba dále prohloubit jistotu při řešení teoretických i experimentálních úloh (soutěž klade velké nároky také na rychlost vyřešení zadaných úkolů). Dále je nutné pěstovat také zručnost pro zvládnutí experimentálních úkolů soutěže a schopnost vyhodnocovat chyby měření.

Podrobnosti o soutěži (program, zadání a řešení soutěžních úloh, bodové výsledky oceněných jednotlivců) může čtenář najít na webovské stránce: `http://ipho2009.smf.mx`.

3. Středoevropská matematická olympiáda

Pavel Calábek, PřF UP Olomouc, Martin Panák, MU AV Brno

Třetí středoevropská matematická olympiáda (Middle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila 24. 9. až 29. 9. 2009 v polském městě Poznaň za účasti 59 studentů z 10 zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska.

Reprezentace České republiky byla sestavena na základě výsledků celostátního kola 58. ročníku matematické olympiády. Do družstva pro MEMO byli nominováni nejlepší řešitelé celostátního kola z nematuritních ročníků středních škol, kteří zároveň letos nebyli na Mezinárodní matematické olympiádě. Českou republiku reprezentovali *Petr Boroš* a *Simona Domesová* (oba GMK v Bílovci), *Radek Marciňa* (G v Praze 5, Zborovská), *Miroslav Olšák* (GB v Praze 5), *Petr Ryšavý* (G v Praze, Mezi Školami) a *Bohuslav Zmek* (G v Brně, tř. Kpt. Jaroše). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Vlastní soutěž probíhala v prostorách Fakulty matematiky a informatiky University Adama Mickiewicze, a to ve dvou dnech: v sobotu 26. září byla na programu soutěž jednotlivců, v neděli 27. září se pak konala soutěž družstev. V soutěži jednotlivců řešili žáci v průběhu pěti hodin čtyři úlohy, v týmové soutěži pak každé národní družstvo mělo stejný čas na řešení osmi úloh. Příklady do soutěže vybírala z návrhů jednotlivých účastnických států mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých národních delegací. Po loňských výsledcích, kdy se vybrané úlohy ukázaly jednoduchými, přistoupila jury pod vedením *dr. Małgorzaty Bednarské* k drobné úpravě pravidel a vybrala úlohy náročnější.

V pondělí po soutěži studenti navštívili lanové centrum a mnohým z nich zůstane tato atrakce nesmazatelně vryta do paměti. Po této fyzicky náročnější aktivitě následovalo večer slavnostní zakončení soutěže, které proběhlo v historické budově univerzity v centru Poznaně.

Podle očekávání oba dny soutěže kralovali soutěžící Polska a Maďarska, kterým zdatně sekundoval tým Německa. V soutěži jednotlivců bylo uděleno šest zlatých medailí, tři z nich získali soutěžící z Maďarska, dvě reprezentanti Polska a po jedné Německa a Slovenska. Absolutním vítězem se stal maďarský soutěžící *Bertalan Bodor* se ziskem 30 bodů z 32 možných. Dva soutěžící na druhém místě získali 20 bodů. Uveďme pro představu počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí získaných jednotlivými družstvy v soutěži jednotlivců. Česká republika (0–1–4), Chorvatsko (0–2–3), Litva (0–0–1), Maďarsko (3–1–2), Německo (1–2–2), Polsko (2–3–1), Rakousko (0–1–2), Slovensko (1–1–0), Slovinsko (0–2–3), Švýcarsko (0–0–1). Z českého týmu zabojoval *Bohuslav Zmek*, který se ziskem 15 bodů obsadil osmé místo a získal stříbrnou medaili; fakt, že za 16 bodů se udělovala zlatá medaile, ho snad brzy přebolí. Pěkné výsledky a bronzové medaile získali ještě *Simona Domesová*, *Miroslav Olšák*, *Petr Ryšavý* (všichni 9 bodů, 27. místo) a *Radek Marciňa* (8 bodů, 36. místo). V soutěži družstev získal prvenství tým Polska (60 bodů ze 64 možných), druhé místo Maďarsko (55 b.) a 52 bodů získaly týmy Německa a Chorvatska, z nichž prvně jmenovaný získal třetí místo díky většímu počtu plně bodovaných řešení. Pěkné páté místo obsadil český tým (42 b.), což oproti loňsku znamená zlepšení o dvě místa. Podrobnější výsledky můžete najít na internetových stránkách této soutěže na adrese `http://www.memo2009.wmi.amu.edu.pl/`.

V následujících tabulkách uvádíme detailní výsledky českých studentů a výsledky národních družstev v týmové soutěži:

		Body za úlohu				Body	Cena
Umístění	**Jméno**	1	2	3	4		
1.	Bertalan Bodor	6	8	8	8	30	G
2.–3.	Fabian Gundlach	8	3	8	1	20	G
2.–3.	Szymon Kubicius	8	3	8	1	20	G
	⋮						
8.–12.	Bohuslav Zmek	5	1	8	1	15	S
27.–35.	Simona Domesová	0	0	8	1	9	B
27.–35.	Miroslav Olšák	0	0	8	1	9	B
27.–35.	Petr Ryšavý	0	0	8	1	9	B
36.–39.	Radek Marciňa	0	0	8	0	8	B
52.–55.	Petr Boroš	0	0	0	1	1	

		Body za úlohu								Celkem
Pořadí		1	2	3	4	5	6	7	8	
1.	Polsko	8	6	8	8	8	8	6	8	50
2.	Maďarsko	6	5	8	8	8	4	8	8	55
3.	Německo	8	4	8	8	8	8	0	8	52
4.	Chorvatsko	8	5	8	5	8	2	8	8	52
5.	Česká republika	8	6	8	8	8	3	1	0	42
6.	Slovinsko	8	2	8	0	8	0	2	8	36
7.–8.	Slovensko	7	3	8	6	8	0	1	1	34
7.–8.	Rakousko	8	3	4	3	2	0	8	6	34
9.	Švýcarsko	0	2	4	8	8	0	0	8	30
10.	Litva	8	2	4	0	5	0	1	4	24

V soutěži jednotlivců český tým neměl problém s geometrickou úlohou, zbývající úlohy byly pro většinu týmu nepřekonatelnou překážkou. Pouze *Bohuslav Zmek* vyřešil podstatnou část algebraické úlohy (funkcionální rovnice). Nejen český tým měl problém s úlohou z teorie čísel, ukázala se jako nejtěžší, řešitelé odevzdali pouze jedno úplné a dvě částečná řešení. V soutěži družstev český tým překvapil, když úplně zvládl obě kombinatorické úlohy, obě algebraické úlohy také vyřešil skvěle a dobře se popasoval s geometrickými úlohami. Zato úlohy z teorie čísel se opět ukázaly být pro český tým nepřekonatelnou překážkou. Po dobrých výsledcích se tak můžeme těšit na příští ročník MEMO, na který pozvali účastníky pořadatelé ze Slovenska. Můžeme doufat, že se nové reprezentaci na současné výsledky podaří navázat.

Na závěr ještě uvádíme zadání všech dvanácti soutěžních úloh.

Soutěž jednotlivců (26. září 2009)

1. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

pro libovolná reálná x, y. ($\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel.)

2. Mějme $n \geq 3$ různých barev. Nechť $f(n)$ je největší přirozené číslo s následující vlastností: každou stranu a každou úhlopříčku konvexního $f(n)$-úhelníku můžeme obarvit jednou z n barev tak, že
- jsme použili minimálně dvě barvy,
- každé tři vrcholy daného mnohoúhelníka určují tři úsečky buď stejné barvy nebo navzájem různých barev.

Dokažte, že $f(n) \leq (n-1)^2$ a že rovnost v této nerovnosti nastává v nekonečně mnoha případech.

3. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami AB a CD, které nejsou rovnoběžné. Označme E, F středy úhlopříček AC a BD. Přímka EF protíná úsečky AB a CD po řadě v bodech G a H. Ukažte, že $|\angle AGH| = |\angle DHG|$.

4. Určete všechna přirozená $k \geq 2$ taková, že pro žádnou dvojici (m, n) různých kladných celých čísel nepřevyšujících k *není* číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ dělitelné číslem k.

Soutěž družstev (27. září 2009)

1. Nechť reálná čísla x, y, z splňují podmínku

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z).$$

Dokažte, že

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27,$$

a určete, kdy nastává rovnost.

2. Nechť a, b, c jsou reálná čísla taková, že pro každé dvě z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + bx + c = 0, \qquad x^2 + cx + a = 0$$

existuje právě jedno reálné číslo, které je řešením obou. Určete všechny možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Na tabuli jsou napsána čísla $0, 1, 2, \ldots, n$ ($n \geq 2$). V každém kroku vymažeme číslo, které je aritmetickým průměrem dvou různých čísel, která ještě na tabuli zůstala. Tyto kroky opakujeme tak dlouho, dokud už žádné další číslo na tabuli nemůžeme smazat. Buď $g(n)$ nejmenší možný počet čísel, která na tabuli mohou zůstat. Pro každé n určete $g(n)$.

4. Každé políčko hrací desky 2009×2009 obarvíme jednou z n barev (nemusíme použít každou z nich). Barvu nazveme *souvislou*, jestliže existuje buď jediné políčko dané barvy, nebo libovolná dvě políčka jsou vzájemně dosažitelná posloupností tahů šachové dámy takových, že se při nich dáma může zastavit pouze na políčkách dané barvy (šachová dáma se po hrací desce může pohybovat vertikálně, horizontálně a diagonálně). Určete největší n takové, že pro libovolné obarvení bude alespoň jedna barva použitá na hrací desce souvislá.

5. Nechť $ABCD$ je rovnoběžník, kde $|\angle BAD| = 60^\circ$ a označme E průsečík jeho úhlopříček. Kružnice opsaná trojúhelníku ACD protíná přímku BA v bodě $K \neq A$, přímku BD v bodě $P \neq D$ a přímku BC v bodě $L \neq C$. Přímka EP protíná kružnici opsanou trojúhelníku CEL v bodech E a M. Dokažte, že trojúhelníky KLM a CAP jsou shodné.

6. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník a $|CD| = |DA|$. Body E a F leží po řadě na úsečkách AB a BC, navíc $|\angle ADC| = 2|\angle EDF|$. Úsečka DK je výškou a DM těžnicí trojúhelníka DEF. Nechť L je obraz bodu K ve středové souměrnosti podle bodu M. Dokažte, že přímky DM a BL jsou rovnoběžné.

7. Nalezněte všechny dvojice (m, n) celých čísel, které splňují rovnici

$$(m + n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

8. Najděte všechna řešení rovnice $2^x + 2009 = 3^y5^z$ v množině nezáporných celých čísel.