Pavel Pokorný

Od numerického experimentu ke goniometrickým nerovnostem

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 4, 19–23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146326`

Od numerického experimentu ke goniometrickým nerovnostem

Pavel Pokorný, Ústav matematiky, VŠCHT Praha

Abstract. The article presents how a numerical experiment can be used to formulate a statement about trigonometric inequalities. It contributes to the discussion on the relation between pure and numerical mathematics.

Úvod

V článku [6] najdeme elegantní důkaz čtyř goniometrických nerovností

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}, \tag{1}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}, \tag{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{3}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{4}$$

které platí pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníka. Přívlastkem *elegantní* obvykle v matematice označujeme postup, který je přesný a jednoduchý. Naproti tomu postup, který je založen na numerickém výpočtu, je často považován za ošklivý, tím spíše, je-li proveden pouze na počítači.

Cílem tohoto článku je ukázat, jak lze numerický experiment využít k formulování přesného tvrzení. V životě matematické věty lze často nalézt tři stadia: domněnku, důkaz a použití. My zde dnes zůstaneme u domněnky. Bude to však vyváženo tím, že naším výsledkem bude zobecnění výše uvedených nerovností.

Tato práce je podporována projektem MSM 6046137306 a vznikla díky přístupu k výpočetním zdrojům METACentrum v rámci MSM 6383917201.

Při bližším pohledu na nerovnosti (2) a (3) je vidět, že výrazy na levé straně jsou zvláštní případy obecnějšího výrazu

$$\sin(p\alpha) + \sin(p\beta) + \sin(p\gamma). \tag{5}$$

Pro $p = 1$ dostaneme levou stranu nerovnosti (3) a pro $p = \frac{1}{2}$ dostaneme levou stranu nerovnosti (2). A podobně výrazy na levé straně nerovností (1) a (4) jsou zvláštní případy obecnějšího výrazu

$$\cos(p\alpha) + \cos(p\beta) + \cos(p\gamma). \tag{6}$$

My se pokusíme nalézt maximum i minimum výrazů (5) a (6) pro libovolné pevné $p \in \langle 0, 1\rangle$.

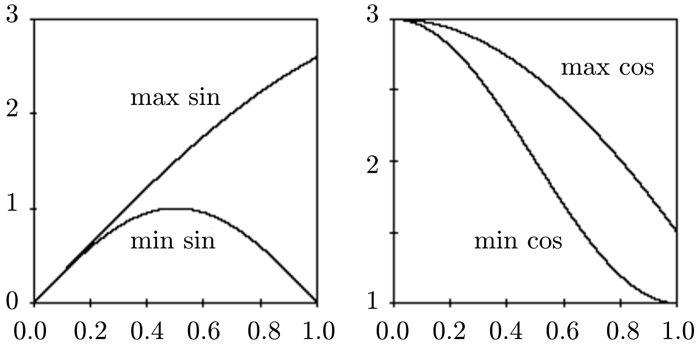
Numerický experiment

Pro zvolené hodnoty p, α, β, γ lze snadno vyčíslit výraz (5). Hledáme-li maximum tohoto výrazu pro pevné p a pro proměnné α, β, γ splňující podmínky $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, lze postupovat tak, že postupně generujeme dvojice $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi\rangle$ (buďto náhodně nebo z nějaké, např. ekvidistantní mřížky). Pokud vygenerovaná dvojice nesplňuje podmínku $\alpha + \beta \leq \pi$, tak ji ignorujeme, pokud tuto podmínku splňuje, tak dopočteme $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ a vyčíslíme výraz (5). Pokud náš nový výsledek převyšuje dosud nalezenou největší hodnotu, tak ji nahradíme novým výsledkem. Podobně porovnáme náš nový výsledek s dosud nalezenou nejmenší hodnotou. Postup zopakujeme pro velký počet, např. 10^6, různých dvojic α, β. Tak dostaneme odhad minima a maxima výrazu

$$\sin(p\alpha) + \sin(p\beta) + \sin(p\gamma)$$

pro jedno pevné p.

Postup zopakujeme pro velký počet, např. 10^3, hodnot p z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Potom vyneseme do grafu závislost odhadnutého maxima na parametru p (obr. 1). Tento graf nám poslouží jako inspirace pro vyslovení domněnky, že maximum součtu sinů je $3\sin\frac{\pi p}{3}$. Dosadíme-li $p = 1$, dostaneme $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ve shodě s (3), a dosadíme-li $p = \frac{1}{2}$, dostaneme $\frac{3}{2}$ opět ve shodě s (2). Obdobně postupujeme pro součet kosinů (obr. 1), který nám napoví, že maximum je $3\cos\frac{\pi p}{3}$. Dosadíme-li $p = 1$, dostaneme $\frac{3}{2}$ ve shodě s (1), a dosadíme-li $p = \frac{1}{2}$, dostaneme $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ve shodě s (4).



Obr. 1. Závislost minima a maxima součtu sinů (vlevo) a kosinů (vpravo) na parametru p.

Závěr

Přestože jsou analytické postupy a výsledky bezpochyby elegantnější, je jednodušší dokazovat tvrzení, které již máme v podobě domněnky, než tvrzení, jejichž podobu teprve hledáme. A právě pro získání této domněnky lze dnes s výhodou použít numerický experiment s počítačem. Ten provedeme u extremálních úloh tak, že vygenerujeme velké množství výsledků pro různé hodnoty proměnných a z nich vybereme maximální a minimální výsledek. To lze provést pro různé hodnoty parametru. Pak vykreslíme závislost minima a maxima na parametru. Tento graf nám poslouží jako inspirace pro uhodnutí skutečné závislosti. Tak jsme v konkrétním případě výrazů (5) a (6) dospěli k této domněnce: Je-li

$$p \in \langle 0, 1 \rangle,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

potom platí

$$\sin(\pi p) \leq \sin(p\alpha) + \sin(p\beta) + \sin(p\gamma) \leq 3 \sin \frac{\pi p}{3},$$

$$2 + \cos(\pi p) \leq \cos(p\alpha) + \cos(p\beta) + \cos(p\gamma) \leq 3 \cos \frac{\pi p}{3}.$$

Maxima se nabývají pro $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, minima se nabývají, je-li jeden z úhlů roven π a ostatní dva úhly jsou nulové.

Čtenář si může vyzkoušet toto cvičení: pokusit se formulovat obdobnou domněnku pro širší rozsah hodnot parametru p (a poté ji zkusit dokázat). Nápověda pro první úkol: v programu z dodatku upravte řádek `p=i/(double)n`. Nápověda pro druhý úkol: uvažujte množinu

$$\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : \alpha\geq 0;\ \beta\geq 0;\ \gamma\geq 0;\ \alpha+\beta+\gamma=\pi\}.$$

Je to rovnostranný trojúhelník s vrcholy na souřadnicových osách ve vzdálenosti π od počátku. Maxima obou výrazů se nabývají ve středu tohoto trojúhelníku, minima ve vrcholech.

Někdy se z numerického experimentu nepodaří odhadnout hledanou závislost jednoduchým vzorcem a je zapotřebí sáhnout po aproximaci, jako např. v případě kriteria stability svislých kmitů pružného kyvadla [2].

Uhádnutí hledané závislosti v žádném případě nenahrazuje důkaz. Může to být však často první krok, který nám pomůže hledanou závislost formulovat. Pak se můžeme pustit do toho druhého, elegantnějšího kroku – skutečného důkazu.

Dodatek

Zde uvádíme program v jazyku C, kterým jsme spočítali data pro vykreslení grafu extremálních hodnot výrazů (5) a (6). Jazyk C je výhodný, protože kvalitní překladač C je součástí každého Unixu a přeložený program je velice rychlý. Tento program např. běží na počítači s dvougigahertzovým procesorem přibližně dvě minuty, přičemž vyhodnocuje 10^9 případů. Pro vykreslení grafu z vypočítaných dat jsme použili program `xpplot` [5]. Pokud by čtenář potřeboval ještě mnohem větší výpočetní výkon, MetaCentrum [7] sdružuje výpočetní centra největších českých univerzit a umožňuje přístup k cca tisícovce výkonných procesorů. O historii výpočetní techniky pojednává [3], použití počítačů ke studiu deterministického chaosu se věnuje [4] a zajímavé odkazy na literaturu o počítačových důkazech lze najít v [1].

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
 int i,j,k,n=1000,v;
 double a,b,c,f,minsin=0,maxsin=0,mincos=0,maxcos=0,
     wsin,wcos;
 for (i=0;i<=n;i++){
```

```
  p=i/(double)n;
  v=1;
  for(j=0;j<=n;j++)
  for(k=0;k<=n;k++)
  if(j+k<=n){
   a=M_PI*j/(double)n;
   b=M_PI*k/(double)n;
   c=M_PI-(a+b);
   wsin = sin(p*a)+sin(p*b)+sin(p*c);
   wcos = cos(p*a)+cos(p*b)+cos(p*c);
   if(v){v=0; minsin=maxsin=wsin; mincos=maxcos=wcos;}
   else{
    if(wsin>maxsin) maxsin=wsin;
    if(wsin<minsin) minsin=wsin;
    if(wcos>maxcos) maxcos=wcos;
    if(wcos<mincos) mincos=wcos;
   };
  };
  printf("%G %G %G %G %G\n",p,minsin,maxsin,mincos,maxcos);
 }; /* i */
 return(0);
} /* main */
```

Literatura

[1] Hora, J.: O počítačových důkazech matematických vět. *Čs. časopis pro fyziku*, č. 6 (2008).

[2] Pokorný, P.: Pružné kyvadlo pohledem teorie dynamických systémů. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, č. 4 (2008).

[3] Pokorný, P.: Od Antikytherského stroje k číslicovému počítači. *Čs. časopis pro fyziku*, č. 6 (2008).

[4] Pokorný, P.: Deterministický chaos – plod počítačové fyziky. *Čs. časopis pro fyziku*, č. 6 (2008).

[5] Pokorný, P.: xpplot (`www.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/xpplot`)

[6] Smýkalová, R.: Čtyři goniometrické nerovnosti. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **83**, č. 4 (2008), s. 1–7.

[7] `http://meta.cesnet.cz`