Dušan Jedinák

Cifry, cifry, cifričky ...

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 2, 49–51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146303

Cifry, cifry, cifričky ...

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita, Trnava

Abstract. The article presents seven mathematical problems concerning divisibility and their solutions. The problems are of various difficulty and are aimed mainly at lower secondary school pupils.

V článku uvádzam šesť úloh pre žiakov základnej školy a ich riešení s rôznym stupňom náročnosti.

Úloha 1. Koľko cifier má číslo $4^5 \cdot 5^{13}$?

Riešenie: Platí

$$4^5 \cdot 5^{13} = 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 5^{10} = 125 \cdot 10^{10},$$

teda skúmané číslo má 13 cifier.

Úloha 2. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2 008.

Riešenie: Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najnižší rád, t.j. počet nenulových cifier, teda čo najviac číslic 9. Pretože

$$\frac{2\,008}{9} = 223 + \frac{1}{9},$$

hľadané číslo je $1\underbrace{99\ldots9}_{223\times}$ (jednotka a za ňou 223 ráz číslica 9).

Úloha 3. Nájdite najväčšie trojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je prvočíslo a ciferný súčin sa rovná tretej mocnine prirodzeného čísla.

Riešenie: Označme hľadané trojciferné číslo v tvare

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z, \quad \text{kde } x \geq y \geq z,$$

lebo chceme číslo čo najväčšie. Pre súčin cifier má platiť $xyz = m^3$, $m \in \mathbb{N}$, a $xyz \leq 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$.

Skúsme $x = 9 = 3^2$ (chceme najväčšie číslo), potom $yz = 3 \cdot 1^3$, či $yz = 3 \cdot 2^3$, či $yz = 3 \cdot 3^3$, lebo potrebujeme exponenty 3. Potom pre $y = 3$, $z = 1$ je ciferný súčet $9 + 3 + 1 = 13$; pre $y = 8 = 2^3$, $z = 3$ je ciferný súčet $9+8+3 = 20$ (nie je prvočíslo); pre $y = 6 = 2\cdot 3$, $z = 4 = 2^2$ je ciferný súčet $9 + 6 + 4 = 19$; pre pre $y = 9 = 3^2$, $z = 9 = 3^2$ je ciferný súčet $9 + 9 + 9 = 27$ (nie je prvočíslo). Riešením úlohy je číslo 964.

Úloha 4. Dokážte, že číslo $123^{123} - 57^{57}$ je deliteľné číslom 10.

Riešenie: Hneď nás napadne: stačí ukázať, že posledná cifra rozdielu musí byť nula, teda 123^{123} aj 57^{57} musia mať poslednú cifru rovnakú. Určíme preto posledné cifry daných čísel.

Posledná cifra čísla 123^{123} je posledná cifra čísla

$$3^{123} = 3^{120} \cdot 3^3 = (3^4)^{30} \cdot 27 = (81)^{30} \cdot 27.$$

To znamená, že posledná cifra je 7. Posledná cifra 57^{57} je posledná cifra čísla

$$7^{57} = 7^{4\cdot 14+1} = (7^4)^{14} \cdot 7 = (2\,401)^{14} \cdot 7,$$

teda posledná cifra je 7.

Ukázali sme, že rozdiel $123^{123} - 57^{57}$ má poslednú cifru $7 - 7 = 0$; skúmané číslo je deliteľné číslom 10.

Úloha 5. Nájdite všetky štvorciferné prirodzené čísla deliteľné siedmimi, pre ktoré zároveň platí: súčet ich prvých dvoch cifier je 10, súčet druhej a tretej cifry je tiež 10, súčet ich posledných dvoch cifier je 9.

Riešenie: Ak si označíme jednotlivé cifry písmenami a, b, c, d (teda číslo $\overline{abcd}$), tak by o nich malo platiť: $a+b = 10$ a zároveň $b+c = 10$ a zároveň $c + d = 9$, to znamená, že $a = c$, $b = 10 - a$, $d = 9 - a$.

Po vyplnení tabuľky pre $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ dostaneme:

a	b	c	d
1	**9**	**1**	**8**
2	8	2	7
3	7	3	6
4	6	4	5
5	5	5	4
6	4	6	3
7	3	7	2
8	**2**	**8**	**1**
9	1	9	0

Z nich vyberieme tie, ktoré sú deliteľné siedmimi: 1 918 a 8 281.

Úloha 6. Nech p je ľubovoľné prvočíslo väčšie ako 3. Dokážte, že ak pre niektore prirodzené číslo n má číslo p^n práve 20 cifier, potom niektoré tri z nich sú rovnaké.

Riešenie: Predpokladajme, že číslo p^n (p je prvočíslo väčšie ako 3) má práve 20 cifier a žiadne tri z nich nie sú rovnaké. Ak nie sú žiadne tri cifry čísla p^n rovnaké, tak dvadsaťciferné číslo p^n obsahuje každú z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 práve dvakrát. Teda ciferný súčet čísla p^n je

$$2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90.$$

Z toho vyplýva, že p^n je deliteľné 3. Ale to je spor, pretože číslo p je prvočíslo väčšie ako 3, a teda nie je deliteľné tromi. Teda ani p^n nie je deliteľné tromi. Preto, ak p^n má práve 20 cifier (p je prvočíslo väčšie ako 3), tak niektoré tri z týchto dvadsiatich cifier čísla p^n musia byť rovnaké.

Úloha 7. Ak v dvojcifernom prirodzenom čísle premiestnime číslice, dostaneme s pôvodnym dve čísla, ktorých podiel je 3 a zvyšok 5. Ktoré sú to čísla?

Riešenie: Keď pôvodne číslo je $\overline{xy} = 10x + y$ a obmenené číslo je $\overline{yx} = 10y + x$, postupne dostávame

$$10x + y = 3(10y + x) + 5 \Rightarrow 7x - 29y = 5, \quad x, y \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}.$$

Postupným dosadzovaním za x čísel z množiny $\{0, 1, \dots, 8, 9\}$ dostaneme len $x = 9$ a $y = 2$.

Literatura

[1] Cirjak, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh.* Essox, Prešov, 2000.

[2] Hecht, T., Sklenáriková, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh.* SPN, Bratislava, 1992.

[3] Miháliková, B. a kol.: *Úlohy matematickej olympiády ZŠ.* Iuventa, Bratislava, 2003.

[4] Odvárko, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* SPN, Praha, 1990.

[5] Repáš, V. a kol.: *Úlohy z matematických olympiád základnej školy.* SPN, Bratislava, 1989.

[6] Zhouf, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky.* Prometheus, Praha, 1997.