Martina Jarošová

Konstrukce zlatého řezu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 2, 12–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146296

Konstrukce zlatého řezu

Martina Jarošová, PřF MU Brno

Abstract. The article deals with golden section construction. First, the basic information on golden section is briefly mentioned, from both mathematical and historical point of view. Then, three interesting problems concerning the golden section construction are presented. Solutions to the problems as well as demonstrations of the construction are included.

Geometrický pojem zlatý řez nalézá své uplatnění v malířství, architektuře, hudbě, ... Umělci tvrdí, že pomocí zlatého řezu lze sestrojit nejkrásnější trojúhelník, nejkrásnější půdorys budovy, či zakreslit tělo o nejkrásnějších proporcích, ... Je ideálním harmonickým, kompozičním poměrem aplikovaným již od starověku ve výtvarném umění. Dokonce se projevuje i v přírodě, např. v anatomii rostlin, v chemii v krystalických strukturách a složení sloučenin, v astronomii v polohách hvězd a planet ([1], [3], [4], [5], [7]).

První písemné zmínky o zlatém řezu pocházejí z antiky, z helénistického Řecka, kdy antický učenec Eukleides (kolem r. 300 př.n.l.) sepsal na tehdejší dobu velkolepé dílo „Základy", knihu, podle které se studovala geometrie až do konce 19. století. Nalezneme v ní tuto zajímavou úlohu: *Jak rozdělit danou úsečku na dvě části tak, aby poměr celé úsečky k větší části byl stejný jako poměr větší části k menší?* Označíme-li tedy délku dané úsečky a, délku její větší části x, pak podmínku z úlohy můžeme vyjádřit rovnicí

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Odtud po snadné úpravě dostaneme

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \tag{1}$$

Jelikož hledáme délku úsečky, zajímá nás pouze kladný kořen rovnice (1), který je tvaru

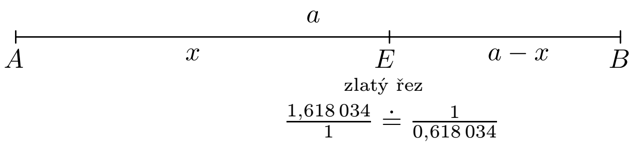
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \qquad \text{odkud} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x.$$

Podíl délky celé úsečky k délce její větší části má tedy hodnotu

$$\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

kterou nazýváme *zlatým podílem* nebo také *zlatým číslem*, nejčastěji však *zlatým řezem* a označujeme ji řeckým písmenem Φ*). Platí tedy

$$\frac{a}{x} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618\,033\,988\,75\ldots$$



Obr. 1. Zlatý řez úsečky AB

V následujících třech úlohách si vysvětlíme, jak lze v různých situacích jednoduše sestrojit zlatý řez úsečky AB (obr. 1). V úloze první budeme znát celou úsečku AB a naším úkolem bude rozdělit ji bodem E v poměru zlatého řezu. Konstrukci úsečky AB v případě, že známe větší díl AE, či menší díl EB úsečky AB dělené v poměru zlatého řezu najdeme v úlohách 2, resp. 3.

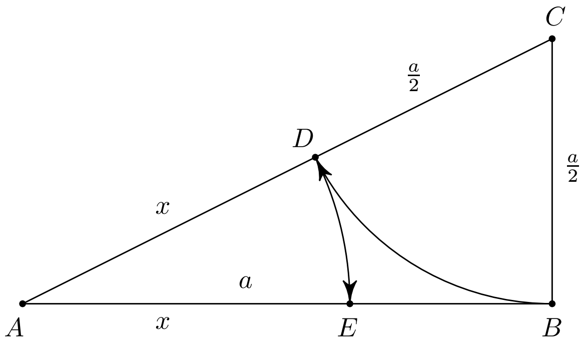
Poznámka: Je nutné si uvědomit, že danou úsečku AB lze rozdělit v poměru zlatého řezu dvěma způsoby. Kromě řešení určeného bodem E z obr. 1 lze totiž nalézti ještě jedno řešení určené bodem E', přičemž platí: $|AE| = |BE'|$ a $|BE| = |AE'|$. Body E a E' jsou tedy souměrně sdružené podle středu úsečky AB.

Úloha 1. Nechť je dána úsečka AB. Nalezněte na úsečce AB bod E tak, aby ji dělil v poměru zlatého řezu, přesněji aby platilo

$$|AB| : |AE| = |AE| : |EB|.$$

Řešení: Nad danou úsečkou AB délky a sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B tak, aby druhá odvěsna BC měla délku $\frac{a}{2}$. Tuto délku naneseme od bodu C na stranu AC, a získáme tak bod D (obr. 2). Nyní do kružítka vezmeme délku AD a naneseme ji od bodu A na úsečku AB, čímž získáme hledaný bod E.

*) Označení zavedl americký matematik Mark Barr začátkem 20. století.



Obr. 2

Zdůvodnění: Ověřme, že sestrojený bod E skutečně dělí výchozí úsečku AB v poměru zlatého řezu. Pro délku $x = |AE|$ dle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC platí

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$

odkud $\frac{5}{4}a^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$, $a^2 = x^2 + ax$, $a(a - x) = x^2$. Nakonec dostáváme

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} = \Phi.$$

Úloha 2. Nechť je dána úsečka AE. Na polopřímce AE sestrojte bod B tak, aby bod E dělil úsečku AB v poměru zlatého řezu s větším dílem AE (a menším dílem BE).

Řešení: Nad úsečkou AE sestrojíme čtverec $AECD$ a určíme střed F strany AE (obr. 3). Opíšeme kružnici k se středem v bodě F o poloměru $|FC|$. Průsečík polopřímky AE a kružnice k je hledaný bod B.

Zdůvodnění: Označme $|AE| = x$. Protože F je střed úsečky AE a ECF je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou EC délky x, platí:

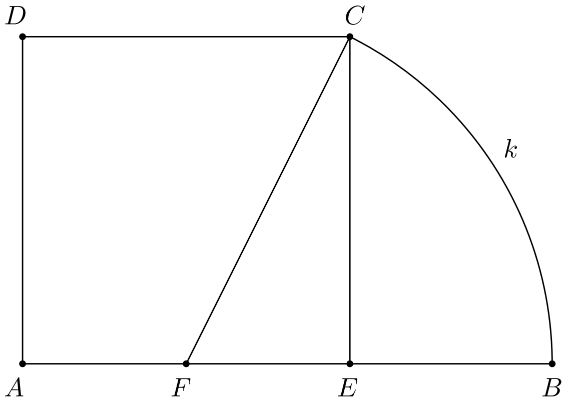
$$|AF| = |FE| = \frac{x}{2}$$

$$|FB| = |FC| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$$

$$|AB| = |AF| + |FB| = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{5} = \frac{x}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Odtud dostáváme

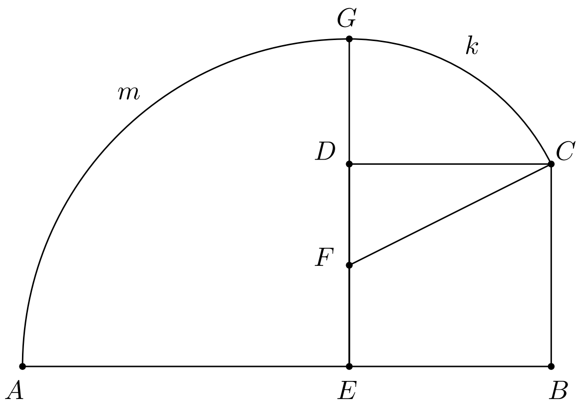
$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{\frac{x}{2}(1+\sqrt{5})}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$



Obr. 3

Úloha 3. Nechť je dána úsečka EB. Na polopřímce BE sestrojte bod A tak, aby bod E dělil úsečku AB v poměru zlatého řezu s větším dílem AE (a menším dílem BE).

Řešení: Nad úsečkou EB sestrojíme čtverec $EBCD$ a určíme střed F strany ED (obr. 4). Opíšeme kružnici k se středem v bodě F o poloměru $|FC|$. Průsečík polopřímky EF a kružnice k označíme G. Sestrojíme kružnici m se středem v bodě E a poloměrem $|EG|$ a hledaný bod A nalezneme jakožto průsečík kružnice m s polopřímkou BE.



Obr. 4

Zdůvodnění: Označme $|EB| = z$. Protože F je střed úsečky DE a DCF je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou CD délky z, platí:

$$|EF| = |FD| = \frac{z}{2}$$

$$|FC| = |FG| = \sqrt{z^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5z^2}{4}} = \frac{z}{2}\sqrt{5}$$

$$|AE| = |EG| = |EF| + |FG| = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}\sqrt{5} = \frac{z}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$|AB| = |AE| + |EB| = \frac{z}{2}(1 + \sqrt{5}) + z = \frac{z}{2}(1 + \sqrt{5} + 2) = \frac{z}{2}(3 + \sqrt{5})$$

Odtud dostáváme

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{\frac{z}{2}(3 + \sqrt{5})}{\frac{z}{2}(1 + \sqrt{5})} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{3 - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 5}{1 - 5} =$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Další informace o zlatém řezu a jeho roli v matematice i v jiných oborech lze nalézt např. v [2], [3], [6].

Literatura

[1] Hejl, J.: Zlatý řez. *Učitel matematiky* **4**, č. 1, (1995), str. 1–8.

[2] Hoggatt, V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[3] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[4] Nagyova, I.: Zlatý řez. [online] `http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka.html` [cit. 2. 9. 2007].

[5] Veselý, J.: Zlatý řez a co vše s ním souvisí. *Učitel matematiky* **6**, č. 3, (1998), str. 153–158.

[6] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci Numbers.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[7] Zdeborová, L.: Květ slunečnice a Fibonacciova čísla. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **82**, č. 1, (2007), str. 1–10.