Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Umíte sčítat přirozená čísla?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 1, 48–52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146288

Umíte sčítat přirozená čísla?

Emil Calda, MFF UK Praha

Abstract. In this article, the formula of the sum of the first n natural numbers is derived and then it is used in several examples which can be interesting not only for the pupils of basic school.

Co je to za otázku, říkáte si patrně, vždyť přirozená čísla umějí sčítat už děti v první třídě! Ano, dovedou, ale jen když počet sčítanců je konkrétní přirozené číslo, např. 2, 3, 4, 5 apod. Znáte snad nějakého prvňáka, který umí určit součet přirozených čísel, jejichž počet konkrétní přirozené číslo není? Kolik je žáčků, kteří dovedou určit součet všech přirozených čísel, která jsou větší než k a menší než m, kde k, m jsou přirozená čísla, $k < m$? Asi velmi málo, jsou-li vůbec takoví. Protože však vy už máte první třídu určitě za sebou, můžete se pokusit určit součty tohoto typu v následujících příkladech.

Úloha 1. Určete součet prvních n přirozených čísel, tj. součet

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n.$$

Řešení: Za tím účelem napíšeme pod tento řádek součet s_n ještě jednou, ale v opačném pořadí sčítanců:

$$\begin{array}{lccccccccccc} s_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ s_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Sečteme-li sčítance stojící nad sebou, dostaneme

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1),$$

neboli $2s_n = n(n+1)$, tj. $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Odvodili jsme tak, že platí

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tento vzorec je zvláštní případ obecného vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, který si odvodíte na střední škole. Zde se také možná dovíte, že výše popsaným způsobem (bez použití odvozeného vzorce) sečetl jako malý žáček prvních sto přirozených čísel budoucí slavný matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855).

Poznámka: Chcete-li například určit součet prvních $2n$ přirozených čísel, což budeme zanedlouho potřebovat, nemusíte uvedený postup opakovat! Stačí v odvozeném vzorci nahradit číslo n číslem $2n$ a pro hledaný součet prvních $2n$ přirozených čísel dostanete, že je roven $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$.

Úloha 2. Určete součet prvních n sudých přirozených čísel, tj. součet

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n-4) + (2n-2) + 2n.$$

Řešení: Z tohoto součtu vytkneme číslo dvě a s použitím odvozeného vzorce pro součet prvních n přirozených čísel snadno dostaneme

$$2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n] = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Tím jsme zjistili, že platí

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n-4) + (2n-2) + 2n = n(n+1).$$

Úloha 3. Určete součet prvních n lichých přirozených čísel, tj. součet

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1).$$

Řešení: Hledaný součet určíme tak, že od součtu prvních $2n$ přirozených čísel odečteme součet prvních n čísel sudých:

$$\begin{gathered}1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1) = \\ = [1+2+3+4+5+\cdots+(2n-4)+(2n-3)+(2n-2)+(2n-1)+2n] - \\ - [2 + 4 + \cdots + (2n-4) + (2n-2) + 2n] = \\ = n(2n+1) - n(n+1) = n^2\end{gathered}$$

Odvodili jsme zajímavý výsledek: Součet prvních n lichých přirozených čísel je roven číslu n^2.

Úloha 4. Ukažte, že zlomek, v jehož čitateli je součet prvních n lichých přirozených čísel a ve jmenovateli součet n lichých přirozených čísel, která následují po posledním čísle čitatele, je pro všechna n roven jedné třetině.

Řešení: Ověřme si nejprve toto tvrzení např. pro $n = 4$. Utvoříme-li uvedený zlomek, dostaneme

$$\frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}.$$

Ukážeme, že tento výsledek platí pro libovolné přirozené číslo n. Čitatele zkoumaného zlomku už znáte, je to číslo

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Určíme nyní jeho jmenovatele, kterým je součet n lichých přirozených čísel následujících po číslu $2n-1$. Jaký sčítanec tohoto součtu bude poslední, tj. n-tý? Protože první sčítanec je číslo $2n+1$, druhý je číslo $2n+3$, třetí $2n+5$ atd., bude n-tým sčítancem číslo $2n+(2n-1)$. Ve jmenovateli uvažovaného zlomku bude tedy součet

$$\begin{aligned}(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \cdots + [2n + (2n-1)] &= \\ = (2n + 2n + 2n + \cdots + 2n) + [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]&.\end{aligned}$$

Uvědomte si dále, že číslo $2n$ se v součtu před hranatou závorkou vyskytuje celkem n-krát (neboť sčítáme n sčítanců) a že součet n stejných sčítanců rovných $2n$ je $n \cdot 2n = 2n^2$. Snadno tak zjistíte, že hledaný jmenovatel zlomku je

$$2n^2 + [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] = 2n^2 + n^2 = 3n^2.$$

Zjistili jsme tak, že uvažovaný zlomek má tvar $\frac{n^2}{3n^2}$, takže pro všechna přirozená čísla n je vskutku roven $\frac{1}{3}$.

Úloha 5. Určete součet všech přirozených čísel n, pro která platí $n \geq k$ a zároveň $n \leq m$, kde k, m jsou přirozená čísla, $k < m$.

Řešení: Hledanou hodnotu s určíme jako rozdíl dvou součtů, který jsme počítali v úloze 1, tedy

$$s = k + (k+1) + \cdots + m = (1+2+3+\cdots+m) - [1+2+3+\cdots+(k-1)] = \\ = s_m - s_{k-1},$$

kde s_m je součet všech přirozených čísel menších nebo rovných číslu m a s_{k-1} je součet všech přirozených čísel menších nebo rovných číslu $k-1$.

Pro hledaný součet s tak dostaneme

$$s = s_m - s_{k-1} = \frac{m(m+1)-(k-1)k}{2} = \frac{m^2-k^2+(m+k)}{2} = \\ = \frac{(m+k)(m-k)+(m+k)}{2} = \frac{(m+k)(m-k+1)}{2}.$$

Ověřme tento výsledek např. pro $k=5$, $m=10$. Součet čísel 5, 6, 7, 8, 9, 10 má být $\frac{(10+5)(10-5+1)}{2} = 45$, což platí: $5+6+7+8+9+10 = 45$.

Úloha 6. Z čísel $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ jsme sestavili výraz

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots$$

Určete jeho hodnotu pro a) n liché, b) n sudé.

Řešení: a) Je-li n liché, má daný výraz tvar

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots - (n-1)^2 + n^2 = \\ = n^2 - (n-1)^2 + \cdots + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2.$$

Tento výraz upravíme tak, že ze sousedních členů vytvoříme dvojice, a protože n je liché, zůstane po jejich vytvoření „osamocený“ člen 1^2:

$$\left[n^2 - (n-1)^2\right] + \cdots + (5^2-4^2) + (3^2-2^2) + 1^2$$

Po dalších úpravách dostaneme

$$[n-(n-1)][n+(n-1)] + \cdots + (5-4)(5+4) + (3-2)(3+2) + 1 = \\ = n + (n-1) + \cdots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zjistili jsme, že pro všechna lichá n platí

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots - (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ověřme tento výsledek např. pro $n=7$: $\frac{7(7+1)}{2} = 28$
$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 = 28.$

b) Je-li n sudé, má daný výraz tvar

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + (n-1)^2 - n^2 =$$
$$= 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \cdots + \left[(n-1)^2 - (n-2)^2\right] - n^2.$$

Jeho dalšími úpravami dostaneme

$$1^2 + (3-2)(3+2) + (5-4)(5+4) + \cdots +$$
$$+ [(n-1) - (n-2)][(n-1) + (n-2)] - n^2 =$$
$$= 1 + (3+2) + (5+4) + \cdots + [(n-1) + (n-2)] - n^2 =$$
$$= [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-2) + (n-1)] - n^2 =$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Zjistili jsme tak, že pro všechna sudá n platí

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + (n-1)^2 - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ověřme tento výsledek např. pro $n = 8$: $-\frac{8(8+1)}{2} = -36$
$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 = 28 - 64 = -36$.

Na závěr článku vám předkládáme problém na rozmyšlenou. Podotýkáme, že to není úloha jednoduchá. Pokud bude vaše počínání úspěšné, budeme rádi, když nám do redakce zašlete nějaký článek na toto téma.

Úloha 8. Většina přirozených čísel je součtem dvou nebo více po sobě jdoucích přirozených čísel, například $24 = 7 + 8 + 9$ nebo $51 = 25 + 26$. Číslo 16 tuto vlastnost nemá. Která další čísla ji rovněž nemají?

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem*, Prometheus, Praha, 2006.