Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaromír Šimša

Odmocniny z přirozených čísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 1, 13–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146281

Odmocniny z přirozených čísel

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Abstract. The article deals with the irrationality of square roots of integers. Linear independence of these values over the field of rationals is discussed from an elementary point of view. Finally, a set of five problems with answers and solutions is presented.

Čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ apod. jste poznali již na základní škole. Potřebujeme je zejména při geometrických výpočtech. Tak například čtverec o straně délky 1 cm má úhlopříčku dlouhou $\sqrt{2}$ cm. Zapsat přesně číslo $\sqrt{2}$ v desítkové soustavě je prakticky nemožné, protože jeho zápis

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\ldots$$

má za desetinnou čárkou nekonečně mnoho nenulových číslic, které se od žádného místa periodicky neopakují. Takovým číslům říkáme *iracionální*; jejich „nevyjádřitelnost“ nám však při praktických užitích matematiky tolik nevadí. Pro situace, ve kterých s nimi počítáme (rozměry fyzických objektů, jejich vzdálenosti, časové údaje apod.), totiž vystačíme (při zvolených jednotkách) s přibližnými hodnotami na několik málo platných číslic. Přesto je zajímavé a užitečné o těchto číslech rozvíjet matematickou teorii výpočtů. V ní iracionální čísla (nikoliv pouze hodnoty odmocnin) popisujeme jako ta reálná čísla x, která *nelze vyjádřit zlomkem*, přesněji zapsat jako podíl

$$x = \frac{a}{b}$$

celého čísla a a přirozeného čísla b. Zdůrazněme, že takové negativní vymezení má pouze teoretický význam bez možnosti praktického testování. Například na většině obyčejných kalkulaček (vyzkoušejte, máte-li nějakou po ruce) se hodnota $\sqrt{2}$ rovná hodnotě zlomku

$$\frac{665\,857}{470\,832} = 1{,}\underline{414\,213\,562\,37}4\ldots$$

(podtrženy jsou číslice shodné s číslicemi čísla $\sqrt{2}$). Uvedený zlomek patří do (nekonečné) skupiny zlomků, které hodnotu $\sqrt{2}$ přibližují opravdu *výjimečně dobře*. Při takovém hodnocení zlomků přirozeně porovnáváme počet číslic jejich jmenovatele s počtem platných číslic výsledku; pro zajímavost uveďme ještě nejlepší přiblížení čísla $\sqrt{2}$ zlomkem s desetimístným jmenovatelem:

$$\frac{10\,812\,186\,007}{7\,645\,370\,045} = 1{,}\underline{414\,213\,562\,373\,095\,048}\,795\ldots$$

Matematikové již ve středověku vymysleli postup, jak takové zlomky efektivně vyhledávat. Nebudeme se ovšem touto otázkou, která měla velký význam při navrhování ozubených soukolí pro mechanismy orlojů, dále v tomto článku zabývat.[1)]

I bez hledání podtržené skupiny číslic je hned jasné, proč nemůže platit (přesná) rovnost

$$\frac{10\,812\,186\,007}{7\,645\,370\,045} = \sqrt{2}.$$

Z ní bychom totiž po umocnění a odstranění zlomku dostali rovnost dvou přirozených čísel

$$10\,812\,186\,007^2 = 2 \cdot 7\,645\,370\,045^2,$$

která zřejmě neplatí. Na její levé straně totiž stojí liché číslo, zatímco číslo na pravé straně je sudé. Možná jste si při této úvaze vzpomněli, že nějak podobně jste ve škole kdysi dokazovali, že číslo $\sqrt{2}$ je skutečně iracionální. Zobecníme to následujícím základním poznatkem, který bychom si měli zapamatovat.

Tvrzení 1 *Kromě hodnot $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$ atd., což jsou celá čísla, pro ostatní přirozená n jsou hodnoty $\sqrt{n}$ iracionální čísla. Jinak řečeno: odmocnina z přirozeného čísla je buď číslo přirozené, nebo iracionální.*[2)]

Abychom uvedené tvrzení dokázali, předpokládejme, že pro nějaké přirozené číslo n existují celá čísla a a b splňující rovnost

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

[1)] Zvídavý čtenář nalezne poučení v brožuře z řady kdysi vydávané *Školy mladých matematiků* P. Vít: Řetězové zlomky, Mladá fronta, Praha 1982.

[2)] Přirozenými čísly míníme pouze celá *kladná* čísla, tedy nikoliv číslo 0.

Protože hodnota $\sqrt{n}$ je kladná, mají čísla a a b stejné znaménko, takže můžeme předpokládat, že jsou to dvě kladná čísla. Naším cílem je ukázat, že zlomek $\frac{a}{b}$ lze zkrátit na celé číslo, které se pak rovná $\sqrt{n}$, takže samo n je rovno jednomu z čísel 1, 4, 9, 25, … . Můžeme jistě od začátku předpokládat, že zlomek v rovnosti (1) je v základním tvaru, a vysvětlit jen, proč potom $b = 1$. K tomu rovnost (1) upravíme do tvaru rovnosti dvou přirozených čísel

$$n \cdot b^2 = a^2 \tag{2}$$

a provedeme tuto úvahu: kdyby se číslo b nerovnalo 1, bylo by dělitelné některým prvočíslem p, takže číslo na levé straně (2) by bylo dělitelné číslem p^2. Pak by i číslo a^2 z pravé strany (2) bylo dělitelné číslem p^2, takže samo číslo a by bylo dělitelné číslem p.[3)] To by ovšem znamenalo, že zlomek v rovnosti (1) je možné ještě zkrátit prvočíslem p. My jsme však už od začátku vzali zlomek v základním tvaru. Musí tedy platit $b = 1$ a důkaz je hotov.

Nyní přejdeme k některým rovnostem, ve kterých vystupují iracionální hodnoty odmocnin z přirozených čísel. Příkladem je rovnost

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = 0.$$

Jistě chápete, proč numerický test na kalkulačce nám v takových případech nezaručí jistotu *absolutně přesné* rovnosti. Místo toho můžeme zadaný výraz snadno upravit částečným odmocněním

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 0$$

a rovnost tím máme ověřenou. Podobné rovnosti můžete sestavovat jako na běžícím pásu, vzniká ovšem zajímavá otázka, zda některá „vzhledově podobná“ rovnost nemá hlouběji skrytou příčinu, takže ji nelze dokázat uvedeným jednoduchým postupem. Zabývejme se tímto problémem ve zbytku příspěvku.

Než popíšeme obecný případ, vyřešme jeden konkrétní úkol: určíme, pro která celá čísla a, b, c je splněna rovnost

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{6} + c = 0. \tag{3}$$

---

3) Toto klíčové místo důkazu vysvětlíme podrobněji: kdyby prvočíslo p nevystupovalo v rozkladu na prvočinitele čísla a, nevystupovalo by ani v rozkladu na prvočinitele čísla a^2, který dostaneme tak, že za sebou dvakrát napíšeme stejný rozklad čísla a. Pomocí rozkladů na prvočinitele lze zdůvodnit rovněž i kratší důkaz celého tvrzení plynoucí z rovnosti (2): protože $b^2 \mid a^2$, platí i $b \mid a$, takže zlomek v (1) je roven celému číslu.

Je tomu tak pouze v triviálním případě $a = b = c = 0$? Zkoumanou rovnost upravíme nejprve tak, že osamostatníme jednu z odmocnin na jedné straně rovnice a pak se jí zbavíme umocněním:

$$a\sqrt{2} = -c - b\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad 2a^2 = c^2 + 2bc\sqrt{6} + 6b^2.$$

Nyní už můžeme uplatnit, co známe: musí být $2bc = 0$, jinak by číslo $\sqrt{6}$ šlo zapsat ve tvaru

$$\sqrt{6} = \frac{2a^2 - c^2 - 6b^2}{2bc},$$

takže by bylo racionální. Proto platí rovnost $2bc = 0$, jež znamená, že $b = 0$ nebo $c = 0$. V případě $b = 0$ by původní rovnost (3) přešla do tvaru $a\sqrt{2} + c = 0$, a tak by bylo $a = c = 0$, neboť $\sqrt{2}$ je iracionální. V případě $c = 0$ bychom měli $a\sqrt{2} + b\sqrt{6} = 0$, neboli $2a^2 = 6b^2$, tedy $a^2 = 3b^2$. Kdyby neplatilo $a = b = 0$, v rozkladu čísla $3b^2$ na prvočinitele by bylo prvočíslo 3 zastoupeno v lichém počtu, zatímco v čísle a^2 v sudém počtu, takže by rovnost $a^2 = 3b^2$ platit nemohla. Zjistili jsme, že žádná „hluboká“ rovnost (3) s celými čísly a, b, c neexistuje, pouze trivialita $a = b = c = 0$.

Máte-li chuť něco vyzkoušet sami, můžete se pokusit předchozí postup zobecnit na hledání rovností s větším počtem odmocnin, jako je například rovnost

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} + d = 0$$

s neznámými celými čísly a, b, c, d. Zjistíte patrně, že upravit předchozí postup je velmi nesnadné a pro rovnosti s ještě větším počtem odmocnin žádné přímočaré zobecnění neexistuje. Budete však dobře připraveni ke čtení toho, co bude následovat.

Předpokládejme, že pro nějaká přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ a celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ platí rovnost

$$a_1\sqrt{n_1} + a_2\sqrt{n_2} + \cdots + a_k\sqrt{n_k} + a_{k+1} = 0 \tag{4}$$

a že žádná zjednodušující úprava výrazů (částečné odmocnění některého čísla nebo sečtení členů se stejnou odmocninou) neexistuje. I v takové obecné situaci platí následující výsledek.

Tvrzení 2 *Předpokládejme, že přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jsou navzájem různá a žádné z nich nelze ani částečně odmocnit. Pak pro celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ platí rovnost* (4) *jedině v případě, kdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1} = 0$.*

Poznamenejme, že žádný jednoduchý důkaz uvedeného tvrzení patrně není znám. Jeho platnost vyplývá ze složité tzv. Kummerovy teorie popisující Galoisovy grupy rozšíření číselných těles.[4] Její výklad bohužel v žádné elementárnější literatuře patrně nenajdete. Místo toho vám teď nabízíme k samostatné práci několik zajímavých úloh o odmocninách, které lze řešit bez složitých teorií. Jejich řešení naleznete na str. 64.

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro něž platí

$$b\sqrt{a} - 3\sqrt{a} - 4b + 12 = 0.$$

2. Jsou-li $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ tři přirozená čísla, pak i čísla $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$ jsou přirozená. Dokažte.

3. Najděte všechny trojice celých čísel a, b, c, pro něž

$$\frac{a + b\sqrt{5}}{a + c\sqrt{5}}$$

je racionální číslo.

4. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(MO 55, C-I-1)

5*. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n

a) číslo $(7 + \sqrt{48})^n + (7 - \sqrt{48})^n$ je celé a pro liché n je dělitelné 14,

b) číslo $\sqrt[n]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[n]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ je iracionální.

L i t e r a t u r a

[1] Flannery, D.: *The Square Root of 2, A Dialogue Concening a Number and a Sequence*, Copernicus Books, Springer Science + Business Media, in Association with Praxis Publishing, Ltd., New York, 2006.

[2] Rychlík, K.: *Úvod do elementární číselné theorie*, JČMF, Praha, 1950.

[4] Francouz Evariste Galois (1811–1832) a Němec Ernst Kummer (1810–1893) patří k zakladatelům algebraické teorie čísel, do které posuzovaná otázka patří. Galois zejména proslul vyřešením otázky, které algebraické rovnice mají kořeny vyjádřitelné ze svých koeficientů pomocí aritmetických operací a operace odmocňování, Kummer například dokázal tzv. velkou Fermatovu větu o rovnici $x^n + y^n = z^n$ pro všechny exponenty $n \leq 100$.