Pavel Pražák

Lineární funkce a rekurentně zadané posloupnosti

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84 (2009), No. 1, 6–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146280

MATEMATIKA

Lineární funkce a rekurentně zadané posloupnosti

Pavel Pražák, FIM UHK, Hradec Králové

Abstract. The paper demonstrates a way how to find a formula for the nth term of a sequence that is given recursively. We concentrate only on a special case when the sequence is given by a linear recurrence relations of the first order with constant coefficients. There are given two applications of the derived formula at the end of the paper. Particularly we formulate and solve a problem of mortgage of loans and a problem of Towers of Benares which is also known as a problem of Towers of Hanoi.

Úvod

Jeden z prvních poznatků studentů středních škol o posloupnostech je, že posloupnost lze zadat buď předpisem pro n-tý člen posloupnosti nebo rekurentně, viz např. [3]. Významnými příklady rekurentního zadání posloupností jsou definice aritmetické a geometrické posloupnosti. V některých případech je možné zadat posloupnost oběma způsoby. Také tato skutečnost je studentům středních škol demonstrována na příkladech aritmetické posloupnosti a geometrické posloupnosti. Ve sbírce [5, str. 66] je uvedeno několik úloh, které požadují, aby se na základě znalosti rekurentního zadání posloupnosti, případně znalosti konečného počtu počátečních členů posloupnosti, odhadl předpis pro n-tý člen dané posloupnosti; podobné úlohy i s ukázkou možného řešení lze nalézt v učebnici [3, str. 15 a 16]. Více se v současných učebnicích matematiky o možném vztahu vzorce pro n-tý člen posloupnosti a jeho rekurentního zadání nepíše. Rádi bychom se proto v tomto článku věnovali určité třídě úloh, pro kterou lze z rekurentního zadání posloupnosti stanovit předpis pro n-tý člen této posloupnosti. Budeme uvažovat pouze rekurentně zadané posloupnosti v následujícím tvaru: Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost; je-li dán první člen y_1 této posloupnosti a předpis

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

budeme říkat, že je posloupnost $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zadána rekurentně. Uveďme však, že takto lze charakterizovat pouze některé rekurentně zadané posloupnosti. Např. známé rekurentní zadání Fibonacciho posloupnosti, viz např. [1], uvedené charakteristice nevyhovuje.

Příklad 1. Je-li $b \in \mathbb{R}$ a $f\colon y = x + b$, je předpisem (1) určena aritmetická posloupnost s diferencí b, tj. je dáno y_1 a platí $y_{n+1} = y_n + b$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 2. Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $f\colon y = a \cdot x$, je předpisem (1) určena geometrická posloupnost s kvocientem a, tj. je dáno y_1 a platí $y_{n+1} = a \cdot y_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Funkce, které jsme použili v předchozích dvou příkladech, jsou speciálními případy lineární funkce $f\colon y = ax + b$ s koeficienty $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. U lineární funkce se navíc požaduje, aby $a \neq 0$, pak tato funkce není konstantní. Pomocí lineární funkce lze získat rekurentní předpis posloupnosti ve tvaru

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \tag{2}$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$. Uvažujme dále. Vzorce pro n-tý člen aritmetické i geometrické posloupnosti, tj. pro speciální případy zadání (2), jsou dobře známy, viz např. [3]. Okamžitě se tedy nabízí také otázka, jak vypadá předpis pro n-tý člen posloupnosti, která je zadána rekurentním předpisem (2).

Prozatím jsme korektně nezdůvodnili, že rekurentní předpis opravdu určuje posloupnost. Zodpovězme tedy nejdříve otázku, zda posloupnost zadaná rekurentně pomocí vztahu (2) existuje a zda je určena jednoznačně. Je-li předpisem určena právě jedna posloupnost, jsou jednoznačně určeny hodnoty jednotlivých členů této posloupnosti. Těchto členů je nekonečně mnoho, takže použijeme matematickou indukci. Počáteční člen y_1 rekurentně zadané posloupnosti (2) je jednoznačně zadán, tedy tvrzení o existenci a jednoznačnosti platí pro $n = 1$. Předpokládejme dále, že v posloupnosti je jednoznačně určen člen pro $n = k$, tj. člen y_k. Použijeme-li nyní předpis (2), je funkcí $f\colon y = ax + b$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$, jednoznačně určen i člen y_{k+1}, takže tvrzení o existenci a jednoznačnosti platí i pro $n = k + 1$. Oba kroky matematické indukce jsou splněny, tedy (2) určuje právě jednu posloupnost a úloha hledat předpis pro její n-tý člen je opodstatněná.

Lineární rekurentní rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty

Dříve než se pustíme do řešení formulované úlohy, podívejme se na rekurentní zadání posloupnosti jiným způsobem. Vztah (2) lze považovat za rovnici, v níž jako neznámá figuruje posloupnost $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, jejíž předpis pro n-tý člen je třeba nalézt. Popišme tuto situaci podrobněji. Abychom mohli v závěru uvést některé aplikace rekurentních posloupností, je užitečné rozšířit definiční obor posloupnosti. Označme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ a libovolnou funkci $n \mapsto y_n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, a $y_n \in \mathbb{R}$ nazývejme posloupnost s počátečním členem y_0. Je-li $p \in \mathbb{R}$, pak vztah

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b, \quad y_0 = p, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

nazýváme *lineární rekurentní rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$. Prvek p nazýváme *počáteční hodnota* rekurentní rovnice. *Řešením* této rovnice je jakákoliv posloupnost s počátečním členem y_0, pro kterou platí (3). Popsanou terminologii budeme používat.

Řešení problému

Hledejme předpis pro n-tý člen posloupnosti, která řeší lineární rekurentní rovnici (3). Protože y_0 je v zápisu (3) dáno, lze použít rekurentní předpis a určit člen y_1, pro který platí

$$y_1 = a \cdot y_0 + b.$$

Známe-li člen y_1, lze opět pomocí rekurentního vztahu určit člen y_2, pro který získáme

$$y_2 = a \cdot y_1 + b = a \cdot (a \cdot y_0 + b) + b = a^2 y_0 + b \cdot (a + 1).$$

Člen y_2 je tedy známý, takže lze analogickým způsobem určit i člen y_3, pro který

$$y_3 = a \cdot y_2 + b = a^3 \cdot y_0 + b \cdot (a^2 + a + 1).$$

Na základě uvedených pozorování lze pro n-tý člen posloupnosti, kde $n \in \mathbb{N}_0$, navrhnout vztah

$$y_n = a^n y_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1). \tag{4}$$

Takový vztah není příliš přehledný, ale zápis lze zkrátit. Všimněme si, že součet v závorce lze zapsat pomocí vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem a, viz např. [3, str. 52]. Získáme tak

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-a^n}{1-a}, & \text{je-li } a \neq 1, \\ n, & \text{je-li } a = 1. \end{cases}$$

Pomocí tohoto vztahu lze (4) přepsat ve tvaru

$$y_n = \begin{cases} a^n y_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}, & \text{je-li } a \neq 1, \\ y_0 + bn, & \text{je-li } a = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Všimněme si, že pro $a = 1$ získáme vztah pro n-tý člen aritmetické posloupnosti s počátečním členem y_0. Položíme-li dále $b = 0$, získáme vztah pro n-tý člen geometrické posloupnosti s počátečním členem y_0. Vztah (4) jsme víceméně uhodli a bude třeba ukázat, že upravená verze tohoto vztahu, tj. (5), je skutečně řešení lineární rekurentní rovnice (3). Dříve než to uděláme, uveďme alespoň dva příklady.

Příklad 3. Pro rekurentní posloupnost $y_{n+1} = 3y_n + 2$, $y_0 = 1$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, je

$$y_n = 3^n + 2 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = -1 + 2 \cdot 3^n.$$

Příklad 4. Pro rekurentní posloupnost $y_{n+1} = y_n + \log 2$, $y_0 = 0$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, je

$$y_n = 0 + n \cdot \log 2 = \log 2^n.$$

Důkaz

Chceme ukázat, že posloupnost $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ zadaná předpisem (5) je jediným řešením lineární rekurentní rovnice (3). To, že existuje právě jedna posloupnost, která splňuje rekurentní vztah, jsme ukázali již v úvodu. Soustředíme se tedy pouze na to, že předpisem (5) je skutečně určeno hledané řešení rovnice (3). Důkaz provedeme pro případ $a \neq 1$, případ $a = 1$ je snažší a provádí se analogicky.

Jak ukázat, že (5) splňuje rovnici (3)? Stačí, když ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je člen y_{n+1} rovný hodnotě $ay_n + b$. Počítejme tedy. Použijeme-li (5), pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$a \cdot y_n + b = a\left(a^n y_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}\right) + b = a^{n+1}y_0 + b\left(a \cdot \frac{1-a^n}{1-a} + 1\right) =$$

$$= a^{n+1}y_0 + b \cdot \frac{a - a^{n+1} + 1 - a}{1-a} = a^{n+1}y_0 + b \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = y_{n+1},$$

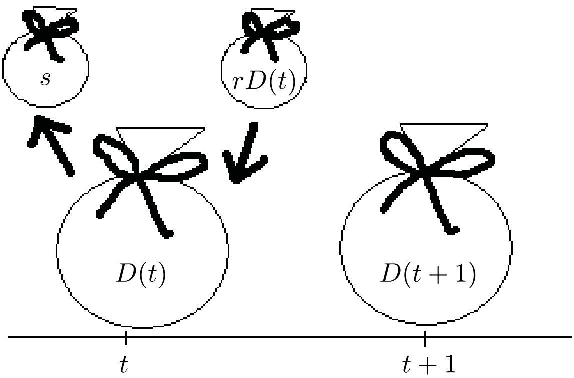
takže posloupnost splňuje požadovaný rekurentní vztah a jsme hotovi.

Aplikace

Rekurentní zadání posloupností lze výhodně využít pro řešení některých problémů. Nejdříve ukážeme jednu aplikaci z finanční matematiky, srv. též [6].

Příklad 5. Banky nebo různé finanční společnosti poskytují půjčky, aby svým klientům umožnily nákup finančně nákladného zboží. Předpokládejme, že hodnota půjčky je D a sjednaná doba, za kterou je třeba půjčku splatit, je $T \in \mathbb{N}$ jednotkových období. Označíme-li D_t hodnotu půjčky v čase $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, je $D_0 = D$ a $D_T = 0$. Nechť úroková míra, za kterou banka půjčku poskytne, je $r \in (0, 1)$, tj. např. $r = 0{,}08$ znamená 8% úrok, a přepokládejme, že banka si připisuje úroky z dlužné částky D_t vždy na konci každého úrokovacího období. Dále uvažujme, že klient splácí svůj dluh tempem s. Toto tempo je třeba určit. Jako jednotku tempa splátek lze uvažovat např. Kč za měsíc.

Na konci časového intervalu $\langle t, t+1\rangle$ se dlužná částka D_t zmenší o splátku s a zvětší se o připsané úroky $r \cdot D_t$ z dlužné částky D_t. To může být vyjádřeno vztahem $D_{t+1} = D_t - s + r \cdot D_t$, viz též obr. 1.



Obr. 1. Splácení půjčky

Úpravíme-li získaný vztah, obdržíme lineární rekurentní rovnici

$$D_{t+1} = (1 + r)D_t - s, \quad D_0 = D,\ D_T = 0. \tag{6}$$

Jak uvidíme, koncovou podmínku $D_T = 0$ bude třeba použít pro stanovení hledaného tempa splátek s. Protože $(1 + r) \neq 1$, je podle (5)

$$D_t = (1 + r)^t \cdot D - s \cdot \frac{1 - (1 + r)^t}{1 - (1 + r)} = (1 + r)^t \cdot D + s \cdot \frac{1 - (1 + r)^t}{r}.$$

Použijeme-li koncovou podmínku $D_T = 0$, tj. dosadíme-li do předchozího vztahu $t = T$, získáme rovnici

$$(1+r)^T \cdot D + s \cdot \frac{1-(1+r)^T}{r} = 0$$

s neznámou hodnotou tempa splátek s. Jejím řešením získáme odpověď na položenou otázku ve tvaru

$$s = r \cdot \frac{(1+r)^T D}{(1+r)^T - 1}.$$

V další ukázce se seznámíme s problémem, který v roce 1883 formuloval francouzský matematik Edouard Lucas. Použil k tomu vymyšlenou báji, viz [2].

Příklad 6. Pod kupolí největší svatyně ve městě Benares, která představuje střed světa, je umístěna bronzová deska se třemi diamantovými jehlicemi. Při stvoření světa navlékl Bůh na jednu z jehlic 64 disků z čistého zlata. Největší je dolní disk a nejmenší je horní. Průměr disků se rovnoměrně zmenšuje od dolního k hornímu. To je Brahmova věž. Dnem i nocí kněží přemísťují disky z jedné diamantové jehlice na druhou podle zákonů, které Bůh stanovil: *(1) je možno přenášet vždy jeden disk, (2) přenesený kroužek lze na jehlici umístit pouze tak, že menší nesmí ležet pod větším.* Až kněží přemístí všech 64 disků z jehlice, na kterou je umístil Bůh, na některou jinou jehlici a vytvoří novou věž, nastane konec světa. Kolik přemístění je třeba k vytvoření věže na jiné jehlici?

Místo 64 disků předpokládejme zpočátku, že věž má pouze 3 disky. Nejdříve nejmenší disk přemístíme na nejvzdálenější jehlici a disk prostřední velikosti přemístíme na prostřední jehlici. Pak umístíme nejmenší disk na prostřední jehlici. Největší disk přeneseme na nejvzdálenější jehlici. Nyní lze přemístit nejmenší disk na počáteční jehlici a následně prostřední disk na nejvzdálenější jehlici. Přeneseme-li nakonec nejmenší disk na nejvzdálenější jehlici, je úkol splněn. Všimněme si, že řešení spočívalo v tom, že se v určité fázi 2 menší disky ocitly na prostřední jehlici a vytvořily tak menší věž. Toto pozorování nám umožní sestavit rekurentní vztah pro počet přemístění dvou věží disků, které se počtem liší o jeden disk.

Označme T_{n+1} počet přemístění $n+1$ disků z první jehlice na poslední. Jak bylo uvedeno v předchozí úvaze, pro přenesení těchto $n+1$ disků je třeba provést toto: nejdříve přenést n menších disků na prostřední jehlici – to je T_n přemístění, pak přenést největší disk na poslední jehlici – to je 1 přemístění a nakonec přenést všechny menší disky z prostření jehlice na jehlici poslední – to je opět T_n přemístění. Mezi počty přemístění tedy platí vztah $T_{n+1} = T_n + 1 + T_n$. Pokud na jehlicích není žádný disk, není třeba provádět žádné přemístění, tj. $T_0 = 0$. Celkem jsme tak získali lineární rekurentní rovnici

$$T_{n+1} = 2T_n + 1, \quad T_0 = 0.$$

Připomeňme, že v posloupnosti nás zajímá člen T_{64}. Pro řešení odvozené rekurentní rovnice použijeme vztah (5), podle něhož pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$T_n = 2^n \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

To znamená, že

$$T_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Pokud by přemístění jednoho disku trvalo pouze jednu sekundu, pak by přemístění všech 64 disků podle stanovených pravidel z jedné jehlice na druhou trvalo více než 500 miliard let. Vzhledem k tomu, že stáří naší Země je asi 4,6 miliard let, nemusíme se této báje zatím bát.

Poznamenejme na závěr, že lze řešit i lineární rekurentní rovnice prvního řádu, které místo konstantních koeficientů $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$ obsahují proměnné koeficienty a_n a b_n. Některé z těchto úloh, včetně jejich aplikací, lze nalézt v [4].

Literatura

[1] Bečvář, J.: Leonardo Pisánský – Fibonacci, v *Matematika ve středověké Evropě*, Prometheus, Praha, 2001.

[2] Kowal, S.: *Matematika pro volné chvíle*, SNTL, Praha, 1986.

[3] Odvárko, O.: *Matematika pro gymnázia, Posloupnosti a řady*, Prometheus, Praha, 1995.

[4] Gavalcová T., Pražák P.: *Základy matematiky 2*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2004.

[5] Petáková, J.: *Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, Praha, 1998.

[6] Pražák, P.: Splácení půjčky, *Rozhledy matematicko-fyzikální* **77** (2000), s. 212–216.