Rozhledy matematicko-fyzikální

Stanislav Trávníček

Optimální tvar podlahy hlediště

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 3, 18–25

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146257`

INFORMATIKA

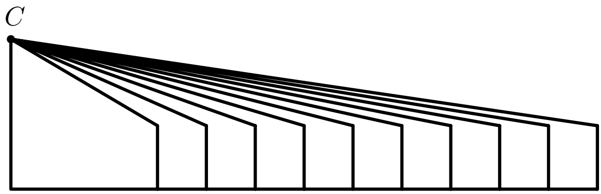
Optimální tvar podlahy hlediště

Stanislav Trávníček, PřF UP Olomouc

Každý asi někdy a někde získal tuto zkušenost: na pódiu, na jevišti, na plátně v kině, na hřišti se něco děje, my však vidíme přes hlavy diváků před námi jen něco, v nejhorším případě jen ty hlavy. V jiném hledišti zase třeba vidíme parádně, a to i pod dolní okraj jeviště, které nás zajímá. Problémy bývají v sálech s vodorovnou podlahou, kdy zpravidla diváci vzadu hůře vidí. Můžeme mít oprávněný pocit, že když se alespoň zadní část podlahy hlediště nadzvedne, tj. když se svažuje k místu předvádění, tak je vzadu vidět lépe.

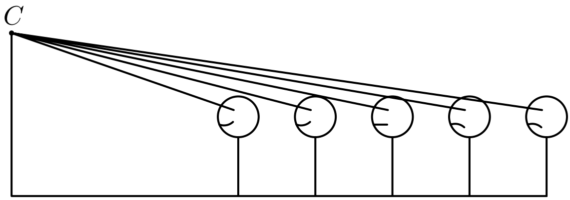
Takže jaká by tedy měla být podlaha hlediště? V dalším nám půjde o to, udělat si o odpovědi na tuto otázku rozumnou představu. Použijeme k tomu matematické modelování, což znamená, že musíme odhlédnout od mnoha konkrétních faktorů a formulovat zjednodušující předpoklady.

Pro určitější vyjadřování si představme například kinosál. Vespod kinosálu je skutečná nebo myšlená základní rovina – podlaha v nejnižší části hlediště. Na čelní stěně je promítací plátno a střed jeho dolního okraje označme C. Budeme se zabývat dále těmi diváky, kteří sedí v sále za sebou, každý uprostřed své řady, tedy naproti bodu C. Tento bod C pro náš účel nazveme cílový bod a budeme předpokládat, že divák, který dobře vidí cílový bod, vidí dobře celé plátno a „dobře vidí“. Dalším zjednodušujícím předpokladem je, že jsou všichni diváci stejně velcí. Zkusme grafický model, kdy diváky zobrazíme jako svislé úsečky. Vytvoříme si jednoduché schéma reálné situace za předpokladu, že podlaha hlediště je přímo v základní rovině (obr. 1).



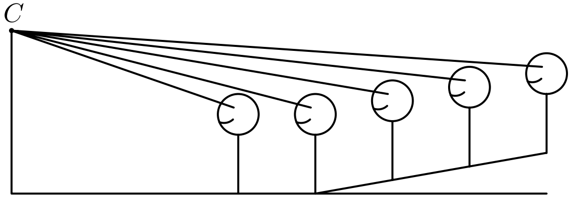
Obr. 1

Přímky jdoucí od diváků k bodu C (znázorňující pohledy diváků) se sice stále zhušťují, ale z tohoto obrázku může vzniknout dojem, že všichni – i ti vzadu – na dolní okraj plátna dobře vidí, i když stále těsněji nad hlavou diváka, který sedí v předchozí řadě. My však víme ze zkušenosti, že tomu tak není, z čehož plyne, že náš model nevystihuje zkoumanou situaci, že je tedy nesprávný, že jsme zanedbali něco podstatného. Podstatu závady objevíme snadno. Zanedbali jsme totiž ten podstatný fakt, že nemáme oči na temeni hlavy, ale níže v obličeji.



Obr. 2

Na obr. 2 je v dokonalejším modelu znázorněno 5 za sebou sedících diváků a vidíme, že první dva vidí dobře (první ovšem samozřejmě), třetímu už vršek hlavy druhého diváka zakrývá cílový bod a čtvrtý a pátý divák už cílový bod nevidí (tj. hlava předchozího diváka jim zakrývá část plátna) a dovedeme si představit, že rozšířením zobrazení hlediště dále doprava by se situace ještě zhoršovala. Z obrázku je také zřejmé, že kdybychom třetího diváka mírně pozvedli, čtvrtého víc a pátého ještě víc, mohli by všichni vidět dobře. Na obr. 3 je voleno nahodilé nadzvednutí podlahy po přímce; vidíme, že se sice diváci liší v tom, jak vysoko vidí nad hlavu předchozího diváka, ale všichni vidí dobře.



Obr. 3

Nás bude zajímat případ, kdy všichni diváci vidí stejně dobře (tento pojem si dále upřesníme), kdy nenastanou případy, že divák vidí „zbytečně dobře“ (samozřejmě první řadu z tohoto porovnávání vyjímáme). Pro další přesnější postup potřebujeme zavést vhodná označení. Volíme tato:

h – výška cílového bodu C nad základní rovinou
x_n – vzdálenost (středu) n-té řady diváků od čelní stěny s bodem C
y_n – výška podlahy n-té řady nad základní rovinou
d – vodorovná vzdálenost mezi řadami
N – počet řad
a – výška očí diváka nad podlahou jeho řady
b – převýšení

Budeme předpokládat, že hodnota a je stejná pro každého diváka; hodnotu parametru a necháme dále volitelnou a jako *standard pro sedícího diváka* budeme dále používat 110 cm. Každý divák je potenciální překážkou dobrého vidění diváka, který sedí za ním. Nebudeme chtít, aby standardní divák při pohledu na bod C viděl temeno hlavy předchozího, ale aby viděl „trochu lépe" a stejně také všichni ostatní vpředu i vzadu. Převýšení b se tedy skládá ze dvou složek: ze vzdálenosti b_1 od vodorovné roviny očí po temeno hlavy (např. 12 cm) a ze vzdálenosti b_2 od temena hlavy po jistý bod P – bod pohledu – nad hlavou (např. 8 cm nebo více). Řekneme, že všichni diváci od 2. řady vidí *stejně dobře*, když jejich oči, bod P předchozího diváka a bod C leží na jedné přímce, tj. když jim při pohledu na cílový bod splyne „průmět" bodu P s bodem C. Volbou b_2 (tedy vlastně volbou b) tedy volíme, „jak moc" má vidět standardní divák nad hlavu standardního diváka sedícího před ním. Tím lze do našeho modelu zapracovat určitou kompenzaci toho faktu, že všichni diváci nejsou stejně velcí, že někdo je většího vzrůstu nebo bude mít na hlavě klobouk (na hokeji). Údaj $c = a + b$ pak udává výšku bodu P nad podlahou příslušné řady, tj. celkovou výšku „překážky". Předpokládáme, že hodnota parametrů a a b je pro různé případy volitelná, ale pro všechny diváky táž. Za těchto předpokladů prohlásíme tvar podlahy hlediště za optimální.

Hodnoty vstupních parametrů h, x_1, y_1, d, N, a, b jsou volitelné, pro výpočet x_n a y_n odvodíme rekurentní vzorce. Pro x_n to není žádný problém, neboť platí

$$x_{n+1} = x_n + d. \tag{1}$$

Rekurentní vzorec pro y_n získáme pomocí obr. 4.

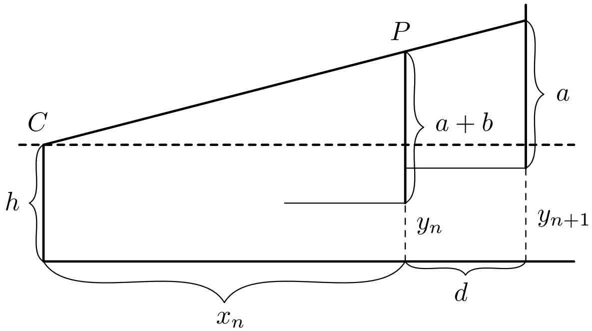
Platí

$$\frac{y_{n+1} + a - h}{x_n + d} = \frac{y_n + a + b - h}{x_n},$$

odkud

$$y_{n+1} = (y_n + a + b - h)\,\frac{x_n + d}{x_n} - a + h. \tag{2}$$

Zvolením hodnot x_1 (vzdálenost první řady diváků od čelní stěny s bodem C) a y_1 (výška podlahy první řady nad základní rovinou) můžeme užitím (1) a (2) vypočítat i graficky znázornit tvar podlahy hlediště. Tato podlaha je zpravidla stupňovitá, tj. každá řada má svou výšku podlahy. Samozřejmě že pro různé hodnoty parametrů dostaneme různé tvary podlahy, což si zanedlouho ukážeme na příkladech.



Obr. 4

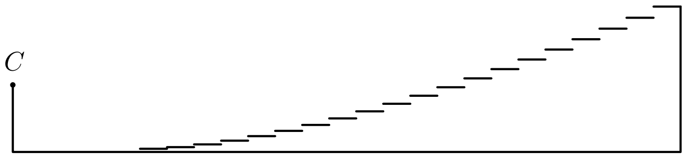
Nejprve si připravme pracovní verzi programu v Pascalu (pracovní verze programu znamená, že jsou použity minimální programovací prostředky k tomu, aby program při svém chodu poskytl maximum potřebných informací). Pro jednoduchost volme základní měřítko zobrazení reálných objektů tak, že 1 cm ve skutečnosti = 1 pixel na obrazovce. Pro získání lepšího přehledu po větších hledištích lze volit koeficient zmenšení Zm; např. pro $Zm = 5$ se obrázek pětkrát zmenší, a lze tak zobrazit až pětkrát větší část hlediště.

V pracovní verzi programu nebudeme parametry volit po spuštění programu, ale přímo ve zdrojovém textu programu. Čtenář znalý programování si program může snadno upravit podle svého.

Analýzou programu se nebudeme zabývat, protože problém je zcela jednoduchý – naprogramovat cyklus pro výpočty (1) a (2) a vypočtený stupeň hlediště (délka stupně je d) zobrazit, dále zobrazit bod C a základní rovinu, případně doplnit další čáry pro získání názornějšího obrázku. Program je dostatečně komentován.

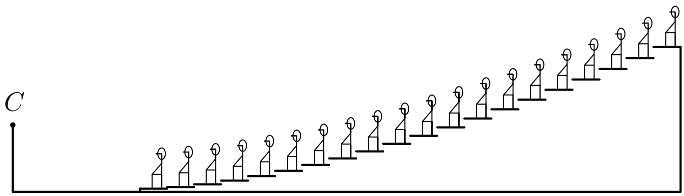
```
program Podlaha;
uses Graph;
const
 A = 110;      {vyska oci sedici postavy}
 B = 20;       {od oci po bod P}
 C = A+B;      {celkova vyska 'prekazky'}
 H = 210;      {vyska bodu C nad zakladni rovinou}
 X1 = 400;     {odstup 1. rady sedadel}
 Y1 = 10;      {vyska 1. rady sedadel}
 D = 85;       {mezera mezi radami}
 N = 20;       {pocet rad}
 Zm = 5;       {zmenseni}
 Ox = 400;     {vertikalni souradnice osy x}
 OY = 6;       {horizontalni souradnice osy y}
var X, Y, Y0: Longint;
 I: Integer;  grDriver, grMode, ErrCode: Integer;
begin {program}
 grDriver := Detect;
 InitGraph(grDriver,grMode,'');
 ErrCode := GraphResult;
 if ErrCode = grOk then
 begin
   X := Oy+X1;
   Y := Y1;
   SetColor(White);
   for I := 1 to N do
   begin
     Y0 := Y;
     {podlaha n-te rady:}
     Line(Oy+(X-D) div Zm, Ox-Y div Zm,
        Oy+X div Zm, Ox-Y div Zm);
     Y := ((Y+C-H)*(X+D)+X div 2) div X +H-A;
     X := X + D
   end;
{celni stena s bodem C:}
   Line(Oy, Ox, Oy, Ox-H div Zm);
   OutTextXY(Oy-2, Ox-H div Zm -10, 'C');
{zakladni rovina:}
   Line(Oy, Ox, Oy+(X1+(N-1)*D) div Zm, Ox);
{predni cast hlediste}
   Line(Oy+(X1-D) div Zm, Ox-Y1 div Zm,
   Oy+(X1-D) div Zm,Ox);
{zadni cast hlediste:}
   Line(Oy+(X1+(N-1)*D) div Zm, Ox,
     Oy+(X1+(N-1)*D) div Zm, Ox-Y0 div Zm);
   ReadLn
 end;
 CloseGraph
end. {program}
```

Na obr. 5 je znázorněn pohled na podlahu hlediště při zadání hodnot parametrů, jak jsou uvedeny ve zdrojovém textu programu, což může odpovídat malému biografu. Podlaha 1. řady je pro větší názornost zadána 10 cm nad základní rovinou, promítací plátno je o 2 m výše, 1. řada je 4 m od plátna, je tu 20 řad, mezera mezi řadami je 85 cm, $Zm = 5$.



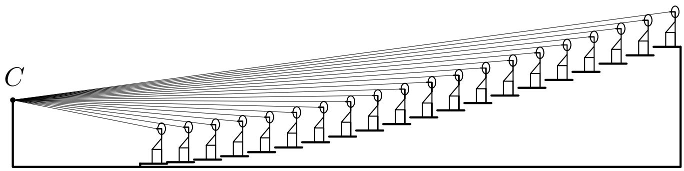
Obr. 5

Čtenář trochu ovládající programování v Pascalu si může sál oživit modely diváků, viz např. obr. 6 s týmž zadáním parametrů jako u obr. 5. Obrázek je vytvořen tak, že každý divák má svůj bod P (přes který za ním sedící divák vidí bod C) – dle zadání čísla b a vzhledem k měřítku – těsně nad hlavou.



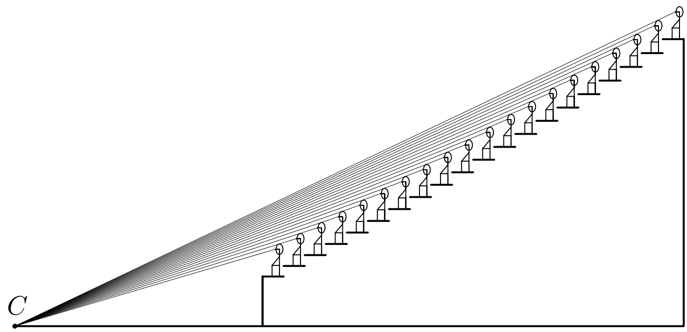
Obr. 6

Můžeme se i přesvědčit, že všichni diváci vidí stejně dobře (zmenšení obrázku ovšem situaci mírně zkresluje, obr. 7). Proberme si ještě některé další případy.



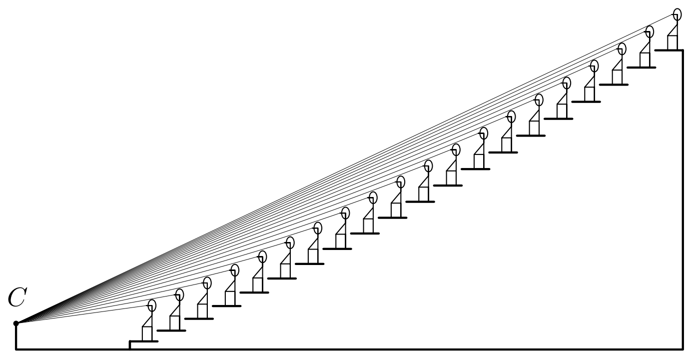
Obr. 7

V některých případech je cílový bod v základní rovině – na bližším okraji hřiště na sportovních stadiónech nebo při sálových sportech. Pro obr. 8 (kopaná) bylo zvoleno $a = 110$, $b = 15$, $h = 0$, $x_1 = 1000$, $y_1 = 200$, $d = 85$, $n = 20$, $Zm = 6$. Zmenšení sklonu hlediště je tu důsledkem většího odstupu 1. řady diváků od vlastního hřiště.



Obr. 8

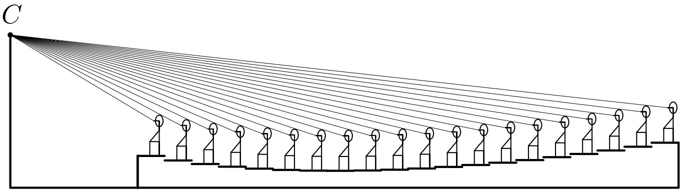
Hlediště na hokejovém stadionu má cílový bod nahoře na nejbližším mantinelu. Pro obr. 9 je zvoleno $a = 110$, $b = 20$, $h = 100$, $x_1 = 350$, $y_1 = 25$, $d = 85$, $n = 20$, $Zm = 6$. Zvětšení h do výšky mantinelu působí na zmenšení sklonu profilu podlahy, ale naopak zvýšení požadavku na vidění (zvětšení b) i menší odstup 1. řady sedadel působí zase opačně na zvětšení jejího sklonu. Čím větší je komfort pro diváka (tj. větší b), tím více se podlaha zvedá.



Obr. 9

Z těchto příkladů vidíme, že hlediště je – zdá se – vždy přivráceno k cílovému bodu a profil podlahy je mírně prohnutý dolů. Tvar a sklon profilu podlahy je velmi závislý zejména na velikosti h, ale též na c a dalších parametrech.

Na závěr si na obr. 10 ukážeme tvar podlahy v kinosálu v případě, že by bylo promítací plátno umístěno poměrně vysoko. Je tu zvoleno: $a = 110$, $b = 18$, $h = 380$, $x_1 = 400$, $y_1 = 100$, $d = 85$, $n = 20$, $Zm = 5$. Vidíme, že obecně neplatí naše předchozí domněnka o sklonu hlediště; v posledním případě je přední část profilu podlahy od bodu C dokonce odvrácena.



Obr. 10

Tyto naše teoretické výzkumy je pak třeba posoudit z hlediska reality. Např. oblouk v profilu podlahy lze z konstrukčních důvodů nahradit úsečkou nebo lomenou čarou a zhoršené vidění, ke kterému by tak mohlo v některých místech hlediště dojít, lze ošetřit úpravou sklonu příslušné strany této lomené čáry. Další úpravou, která částečně přináší určitou úsporu, je to, že sedadla jednotlivých řad nejsou přesně za sebou, ale jsou mezi dvěma řadami posunuta stranou o půl sedadla. Tím by mohl být zmenšen sklon profilu podlahy. Stranové posunutí sedadel je však třeba doplnit vhodnou volbou hodnoty parametru b, resp. c; musíme totiž vzít v úvahu, že čím více se blížíme k okrajům řad, přestává stranové posunutí fungovat, a sledování programu může rovněž narušit dvojice před námi, která si má co sdělovat a naklání k sobě hlavy. V moderních hledištích se proto počítá s dostatečně velkým parametrem c.

Dobrá matematika, nech už pramení z čohokoľvek, sa nakoniec ukáže ako užitočná.

Ian Stewart: Čísla prírody. Bratislava: Archa 1996

Vybral D. Jedinák