Emil Calda

Pět příkladů o dělitelnosti celých čísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 2, 46–48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146249

PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

Pět příkladů o dělitelnosti celých čísel

Emil Calda, MFF UK Praha

V následujících příkladech si můžete nejen prohloubit znalosti o celých číslech, ale také se seznámit se způsoby, které se používají při dokazování vět týkajících se jejich dělitelnosti.

Příklad 1. Dokažte, že pro všechna celá čísla m je $m^5 - 5m^3 + 4m$ dělitelné číslem 120.

Řešení: K důkazu vět o dělitelnosti celých čísel je v některých případech užitečné rozložit daný výraz na součin. Pokusíme se o to i v tomto příkladu a daný trojčlen $m^5 - 5m^3 + 4m$ vyjádříme ve tvaru součinu; jednotlivé kroky následujícího postupu jistě umíte zdůvodnit sami:

$$\begin{aligned} m^5 - 5m^3 + 4m &= m(m^4 - 5m^2 + 4) = \\ &= m[(m^4 - 1) - 5(m^2 - 1)] = \\ &= m[(m^2 - 1)(m^2 + 1) - 5(m^2 - 1)] = \\ &= m(m^2 - 1)(m^2 - 4) = \\ &= (m - 2)(m - 1)m(m + 1)(m + 2) \end{aligned}$$

Využijeme nyní toho, že pro každý součin pěti po sobě jdoucích celých čísel platí: Právě jedno z těchto pěti čísel je dělitelné pěti, aspoň jedno je dělitelné třemi a aspoň dvě jsou sudá. Protože však mezi těmito sudými čísly jsou dvě sudá čísla lišící se o dvě, je jedno z nich dělitelné čtyřmi (součin sudých čísel je tedy dělitelný 8). Odtud plyne, že tento součin, a tedy i daný trojčlen, je dělitelný čísly 5, 3 a 8, takže je dělitelný i jejich součinem, tj. číslem $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$.

Příklad 2. Dokažte, že pro žádné celé číslo m není $m^2 + 3m + 5$ dělitelné číslem 121.

Řešení: V tomto případě se vám daný trojčlen rozložit na součin nepodaří, neboť – jak někteří víte – diskriminant příslušné kvadratické rovnice je záporný. Větu dokážeme tak, že uvažovaný trojčlen zapíšeme ve tvaru

$$(m + 7)(m - 4) + 33.$$

Ptáte se, proč zrovna takto? Protože v tomto vyjádření je číslo 33 dělitelné jedenácti a platí

$$(m+7)-(m-4)=11.$$

Z této rovnosti totiž plyne, že čísla $m+7$ a $m-4$ jsou dělitelná jedenácti buď obě dvě, anebo žádné. (Kdyby bylo dělitelné jedenácti pouze jedno z nich, nemohl by být dělitelný jedenácti jejich rozdíl.)

Předpokládejme nyní, že výraz

$$(m+7)(m-4)+33$$

je dělitelný číslem 121. Znamená to, že je dělitelný také číslem 11, a protože $33=3\cdot 11$, je dělitelný jedenácti i součin $(m+7)(m-4)$, takže jedenácti je dělitelný aspoň jeden z těchto činitelů. Protože však podle předchozího víme, že dělitelní jedenácti jsou buď oba, nebo žádný, pak z toho, že dělitelný jedenácti je aspoň jeden z nich, plyne, že dělitelní jedenácti jsou oba.

Odtud potom dostáváme, že součin $(m+7)(m-4)$ je dělitelný číslem $11^2=121$, a protože 33 není číslem 121 dělitelné, není tímto číslem dělitelný ani výraz

$$(m+7)(m-4)+33=m^2+3m+5.$$

Příklad 3. Dokažte, že součin každých čtyř po sobě jdoucích celých čísel zvětšený o jedna je druhá mocnina celého čísla.

Řešení: Označíme tato celá čísla $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ a dokážeme, že výraz

$$(m-1)m(m+1)(m+2)+1$$

je druhá mocnina celého čísla. Roznásobením všech čtyř činitelů daného výrazu a dalšími úpravami, které byste měli provést sami, bude platnost dané věty dokázána:

$$\begin{aligned}(m-1)m(m+1)(m+2)+1&=m^4+2m^3-m^2-2m+1=\\&=(m^2+m)^2-2(m^2+m)+1=(m^2+m-1)^2\end{aligned}$$

Příklad 4. Dokažte, že součet druhých mocnin žádných pěti po sobě jdoucích celých čísel není druhá mocnina přirozeného čísla.

Řešení: Označíme tato celá čísla $m-2$, $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ a určíme součet jejich druhých mocnin. Přesvědčte se sami, že platí:

$$(m-2)^2 + (m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 = 5(m^2+2)$$

Předpokládejme nyní, že výraz $5(m^2+2)$ je druhá mocnina přirozeného čísla, tj.

$$5(m^2+2) = k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aby tato rovnost platila, musí být m^2+2 násobek pěti, neboť jen v tomto případě je $5(m^2+2)$ násobkem čísla 25, a může tak být druhou mocninou přirozeného čísla. Je-li však číslo m^2+2 násobek pěti, je jeho poslední číslice nula nebo pětka, což znamená, že poslední číslice čísla m^2 je trojka nebo osmička. To však není možné, neboť druhá mocnina každého celého čísla končí jednou z číslic 0, 1, 4, 9, 6 a 5. Číslo $5(m^2+2)$ proto pro žádné celé číslo m druhou mocninou přirozeného čísla není.

Příklad 5. Dokažte, že druhé mocniny všech prvočísel větších než tři dávají při dělení dvanácti zbytek jedna.

Řešení: Uvědomíte-li si, že při dělení žádného celého čísla šesti nedostanete jiný zbytek než jedno z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, snadno usoudíte, že každé celé číslo se dá vyjádřit pouze v jednom z těchto tvarů

$$6m,\ 6m+1,\ 6m+2,\ 6m+3,\ 6m+4,\ 6m+5,\ \text{kde } m \text{ je celé číslo.}$$

A protože žádné z čísel $6m$, $6m+2$, $6m+3$ a $6m+4$ prvočíslem není (vysvětlete sami), mají všechna prvočísla větší než tři tvar $6m+1$ nebo $6m+5$. Vypočteme-li nyní druhé mocniny těchto čísel, dostaneme:

$$(6m+1)^2 = 36m^2 + 12m + 1 = 12(3m^2+m) + 1$$
$$(6m+5)^2 = 36m^2 + 60m + 25 = 12(3m^2+5m) + 1$$

Tím je daná věta dokázána: Druhá mocnina každého prvočísla, které je větší než tři, dá při dělení dvanácti zbytek rovný jedné.

Poznámka: V předcházejícím příkladu bylo zdůvodněno, že každé prvočíslo větší než tři lze vyjádřit ve tvaru $6m+1$ nebo $6m+5$. Nemyslete si však, že každé číslo, které je možno v tomto tvaru zapsat, je prvočíslo! Například čísla 49 ani 65 prvočísly nejsou, ale v tomto tvaru se napsat dají: $49 = 6 \cdot 8 + 1$, $65 = 6 \cdot 10 + 5$.