Úlohy domácího kola 58. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 2, 27–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146247

Úlohy domácího kola 58. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

KATEGORIE Z5

1. Učitelka Kadrnožková kupovala v pokladně zoologické zahrady vstupenky pro své žáky a pro sebe. Vstupenka pro dospělého byla dražší než pro školáka, avšak ne více než dvakrát. Učitelka Kadrnožková zaplatila celkem 994 Kč. Učitel Hnízdo měl s sebou o tři žáky více než jeho kolegyně, a tak za své žáky a za sebe zaplatil 1 120 Kč.

a) Kolik žáků měl s sebou učitel Hnízdo?
b) Kolik stála vstupenka pro dospělého?

(*L. Šimůnek*)

2. František Nudílek se zabýval tím, že psal po sobě jdoucí přirozená čísla. Začal takto: 1234567891011… Po čase ho to přestalo bavit, dokončil právě rozepsané číslo a kriticky se podíval na svůj výtvor. Zjistil, že v posloupnosti číslic, které napsal, se vyskytuje pět jedniček bezprostředně za sebou.

a) Kolik nejméně po sobě jdoucích přirozených čísel musel František napsat?
b) Kolik nejméně číslic musel František napsat?

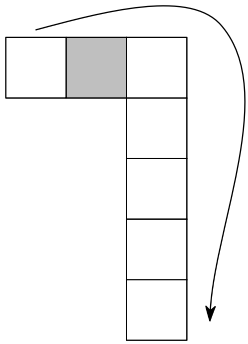
(*S. Bednářová*)

3. Nejvyšší známá sopka na Zemi je Mauna Kea na Havajských ostrovech. Její výška od úpatí po vrchol je dokonce o 358 metrů větší, než je nadmořská výška nejvyšší hory světa, Mount Everestu. Nezvedá se však z pevniny, ale ze dna Tichého oceánu, z 5 000 metrové hloubky. Kdyby mořská hladina v této oblasti klesla o 397 metrů, byla by ponořená část Mauna Key přesně stejně vysoká jako část, která by vyčnívala nad hladinu.

a) Jakou nadmořskou výšku má vrchol sopky?
b) Kolik měří Mauna Kea od úpatí po vrchol?
c) Jakou nadmořskou výšku má Mount Everest?

(Údaje o nadmořských výškách uváděné v různých zdrojích se mohou lišit, což je způsobeno nepřesnostmi měření, pohyby zemské kůry, vrstvou sněhové pokrývky apod. Při řešení úlohy proto vycházej pouze z údajů v ní uvedených.) (*S. Bednářová*)

4. Klasická hrací kostka se převracela naznačeným směrem po plánu na obrázku. Na každém políčku zůstaly otisknuté tečky ze stěny, kterou se kostka plánu dotýkala. Počet všech teček otisknutých na plánu byl 23.

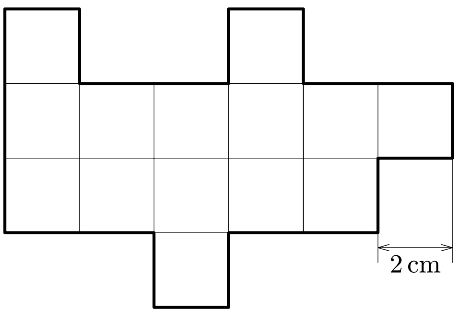


Kolik teček bylo otisknuto na vybarveném políčku?

(Klasická hrací kostka má na stěnách tečky v počtu od 1 do 6 umístěné tak, že na protilehlých stěnách je vždy dohromady 7 teček. Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.) (*M. Dillingerová*)

5. Digitální hodiny ukazují hodiny a minuty, jako například 14:37.
Kolik minut denně svítí na těchto hodinách alespoň jedna pětka? (*M. Volfová*)

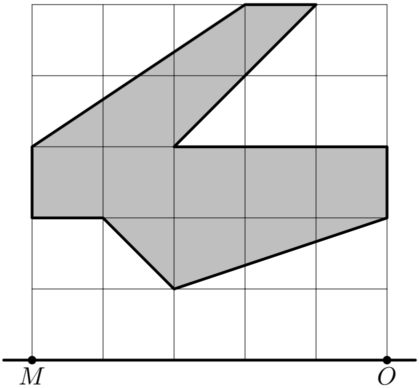
6. Dan si ze čtvercové sítě vystřihl útvar jako na obrázku.



Odstřihni dva čtverečky sítě tak, aby se výsledný útvar nerozpadl a měl co největší obvod. Najdi všechna řešení. (*M. Dillingerová*)

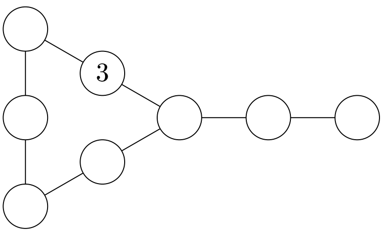
KATEGORIE Z6

1. Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.



V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku? (*L. Šimůnek*)

2. Do prázdných polí vepiš čísla 2, 4, 6, 8, 12, 14 a 21 tak, aby tři čísla zapsaná na jedné úsečce dávala vždy stejný součin. Napiš svůj postup.



(*L. Šimůnek*)

3. B-banka vydává bankomatové karty se čtyřmístným PIN kódem, který neobsahuje číslici 0. Pan Skleróza se bál, že zapomene PIN kód své karty, proto si ho napsal přímo na ni, avšak římskými číslicemi IIIVIIIXIV, aby to případný zloděj neměl tak jednoduché. Svůj nápad prozradil nejlepšímu příteli, panu Odkoukalovi, který byl také klientem B-banky. Ten záhy se svým PIN kódem udělal totéž a na kartu si napsal IVIIIVI. Ke svému velkému překvapení však z římského zápisu neuměl svůj PIN kód určit přesně.

a) Jaký PIN kód má karta pana Sklerózy?

b) Jaký PIN kód může mít karta pana Odkoukala?

(*S. Bednářová*)

4. Načrtni všechny možné tvarově různé čtyřúhelníky, které mají vrcholy ve vrcholech daného pravidelného šestiúhelníka.

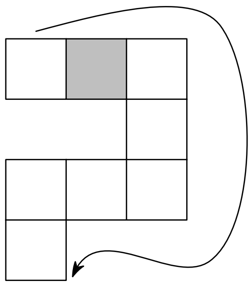
Urči, jaké by byly jejich obsahy, kdyby šestiúhelník měl obsah 156 cm^2.

(*M. Volfová*)

5. Paní Kučerová byla na sedmidenní dovolené a Káťa jí po celou tuto dobu venčila psa a krmila králíky. Dostala za to velký dort a 700 Kč. Po další dovolené, tentokrát čtyřdenní, dostala Káťa za venčení a krmení podle stejných pravidel stejný dort a 340 Kč.

Jakou cenu měl dort? (*M. Volfová*)

6. Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.



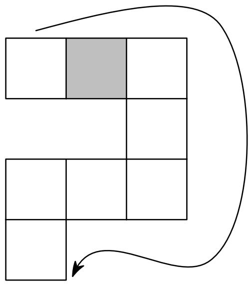
Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl nejmenší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

(*M. Dillingerová*)

KATEGORIE Z7

1. Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku největším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

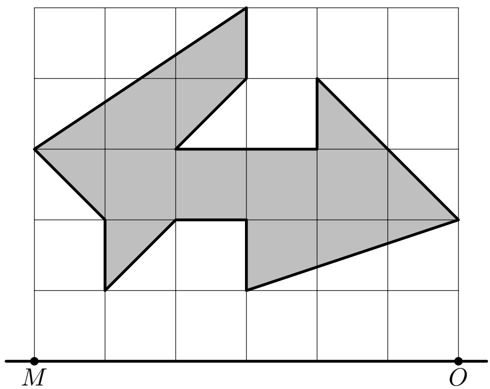


Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

(*M. Dillingerová*)

2. Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm.



V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu. V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku? (*L. Šimůnek*)

3. Turisté plánovali dlouhou túru na tři dny s tím, že každý den ujdou třetinu celé trasy. To dodrželi jen první den. Druhý den ušli pouze třetinu zbylé cesty a třetí den, unaveni, jen čtvrtinu zbytku. Posledních 24 km do cíle je dovezlo terénní auto.

Jak dlouhá měla být celá túra a kolik kilometrů turisté ušli první, druhý a třetí den? (*M. Volfová*)

4. Pan Horák je o 3 roky starší než jeho žena a jejich prvorozený syn je o 4 roky starší než jejich druhorozený. Všichni čtyři členové rodiny slaví narozeniny ve stejný den, nyní mají dohromady 81 let. Před 5 lety bylo členům této rodiny dohromady 62 let. Urči dnešní stáří rodičů i obou dětí. (*M. Volfová*)

5. Zuzka napsala pětimístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo.

Které pětimístné číslo Zuzka napsala? (*L. Hozová*)

6. Je dán obdélník $ABCD$. Bodem A vedeme přímku, která protne úsečku CD v bodě X tak, že pro obsahy vzniklých útvarů platí $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Bodem X vedeme přímku, která protne úsečku AB v bodě Y tak, že platí $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$. Nakonec bodem Y vedeme přímku, která protne úsečku XC v bodě Z tak, že platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$.

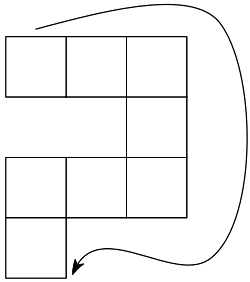
Vypočítej poměr obsahů $S_{AXD} : S_{AXZY}$. (*M. Dillingerová*)

KATEGORIE Z8

1. Myslím si nezáporné číslo ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem 12. Když je napíši ve tvaru desetinného čísla, bude mít před i za desetinnou čárkou po jedné číslici, obě tyto číslice budou nenulové. Čísel, která mají obě uvedené vlastnosti, je více. Pokud je však seřadím od nejmenšího po největší, bude to „moje“ předposlední.

Jaké číslo si myslím? (*S. Bednářová*)

2. Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.



Kterým svým číslem se kostka plánu nedotkla, jestliže součet všech napsaných čísel byl 86?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

(*M. Dillingerová*)

3. Grafik v redakci novin dostal dva obrázky, aby je umístil k článku. První originál byl 13 cm široký a 9 cm vysoký, druhý měřil na šířku 14 cm a na výšku 12 cm. Grafik se rozhodl umístit obrázky na stránku vedle sebe tak, aby se dotýkaly a aby oba měly stejnou výšku. Po vytištění měly obrázky dohromady zaujímat šířku 18,8 cm. Obrázky tedy vhodně zmenšil, aniž by je jakkoli ořezával.

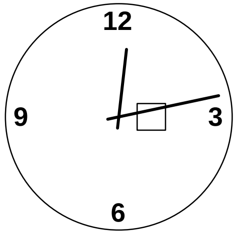
Jaká bude výška vytištěných obrázků? (*L. Šimůnek*)

4. Máme dány tři navzájem různé nenulové číslice. Na tabuli napíšeme všechna trojciferná čísla, která lze složit z těchto číslic, přičemž pro každé číslo použijeme všechny tři číslice. Součet napsaných čísel je 1 776.

Se kterými třemi číslicemi jsme pracovali? Určete všechna řešení.

(*L. Šimůnek*)

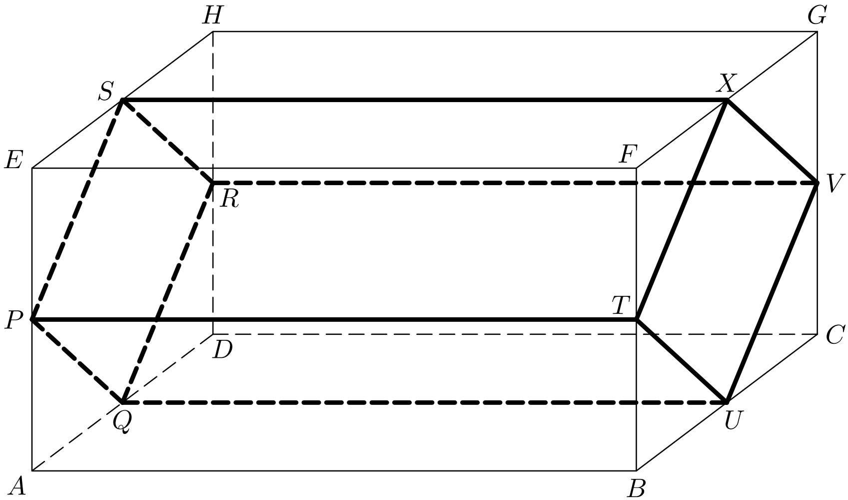
5. Na věži radnice jsou hodiny, které mají blízko středu ciferníku dvířka používaná při údržbě. Dvířka se však otevírají ven, což je nepraktické — například přesně v 12:09 zakryje velká ručička dvířka, která pak nejdou otevřít po dobu, jež končí přesně v 12:21.



Kolik minut denně dvířka nelze otevřít?

(Nezapomeňte, že dvířka může zakrýt i malá ručička; celá dvířka leží v kruhu, který tato ručička opisuje.) (*L. Šimůnek*)

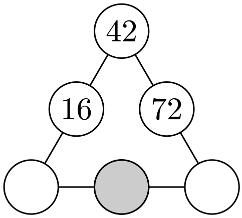
6. V kvádru $ABCDEFGH$ je umístěno těleso $PQRSTUVX$, jehož vrcholy jsou středy hran kvádru, viz obrázek.



Vypočtěte objem a povrch tělesa, je-li: $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BF| = 4\,\mathrm{cm}$. (*M. Krejčová*)

KATEGORIE Z9

1. Do tří prázdných polí na obrázku patří taková přirozená čísla, aby součin tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.

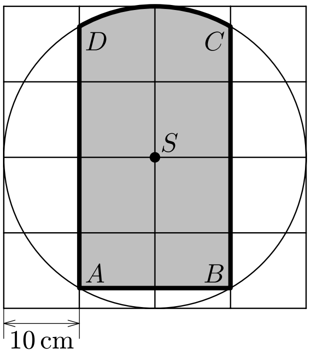


Jaké nejmenší a jaké největší číslo může být za této podmínky vepsané v šedě vybarveném poli? (*L. Šimůnek*)

2. Alena, Bára, Čeněk a David si společně koupili tandem — jízdní kolo pro dva. Na projížďku vyrážejí vždy ve dvojici. Každý jel s každým už alespoň jednou a nikdo jiný se na tandemu ještě nevezl. Alena byla na projížďce jedenáctkrát, Bára dvacetkrát, Čeněk jen čtyřikrát.

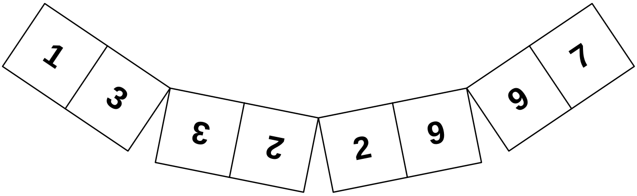
Určete, kolikrát minimálně a kolikrát maximálně mohl být na projížďce David. (*L. Šimůnek*)

3. Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky 10 cm, je narýsována kružnice se středem S ve vyznačeném mřížovém bodě a poloměrem 20 cm. Body A, B, C a D jsou průsečíky kružnice se síťovými přímkami.



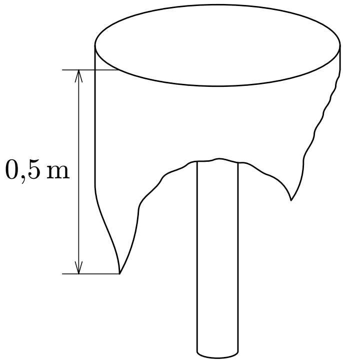
Určete obsah vybarvené plochy $ABCD$. (*L. Šimůnek*)

4. Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ — každá kostka odpovídala jednomu dvojmístnému prvočíslu tak, že na každé polovině kostky byla jedna číslice tohoto prvočísla. Žádné dvojmístné prvočíslo v dominu nechybělo a žádné prvočíslo nebylo na dvou kostkách. Dominik se rozhodl, že všechny kostky uspořádá do kružnice tak, aby kostky ležící vedle sebe sousedily stejnou číslicí, viz obrázek.



Jeho kamarád Bořek mu řekl, že to nelze provést. Měl Bořek pravdu?
(*M. Petrová*)

5. Na stole s kruhovou deskou o průměru 0,6 m je „nakřivo" položený čtvercový ubrus se stranou 1 m. Jeden cíp ubrusu přečnívá přes hranu desky stolu 0,5 m, sousední cíp 0,3 m.



Určete délku přesahu zbylých dvou cípů. (*S. Bednářová*)

6. Čtyři tatínkové chtěli dětem sponzorovat lyžařský zájezd.
První slíbil: „Dám 11 500 Kč,"
druhý slíbil: „Dám třetinu toho, co vy ostatní dohromady,"
třetí slíbil: „Já dám čtvrtinu toho, co vy ostatní dohromady,"
čtvrtý slíbil: „A já dám pětinu toho, co vy ostatní dohromady."
Kolik korun slíbil druhý, třetí a čtvrtý tatínek?
(*M. Volfová*)