Rozhledy matematicko-fyzikální

Emil Calda

Vektory v úloze o barevných kuličkách

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 2, 12–14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146243

Vektory v úloze o barevných kuličkách

Emil Calda, MFF UK Praha

Nenechme se zastrašit následující představou a mysleme si, že máme v klobouku devět červených, jedenáct modrých a třináct zelených kuliček a že kromě nich máme ještě k dispozici dostatečnou zásobu kuliček těchto tří barev. Z klobouku vybereme jakékoli dvě kuličky, se kterými naložíme takto: *Jestliže mají stejnou barvu, vrátíme je zpátky; jestliže nemají stejnou barvu, dáme je stranou a do klobouku vložíme dvě shodně obarvené kuličky, jejichž barva je však jiná, než mají kuličky vytažené.* (Vytáhneme-li např. modrou a zelenou, dáme obě stranou a do klobouku vložíme dvě kuličky červené.)

Je zřejmé, že opakováním tohoto postupu se celkový počet kuliček v klobouku nemění, ale protože se mohou měnit počty kuliček jednotlivých barev, vzniká otázka: *Může uvedeným způsobem dojít k tomu, že v klobouku budou pouze kuličky stejné barvy, tj. že v něm bude* 33 *kuliček červených, nebo* 33 *modrých, nebo* 33 *zelených?*

K nalezení odpovědi využijeme svých znalostí o vektorech; vystačíme s tím, že je umíme sčítat a násobit reálným číslem a že víme, kdy se dva vektory rovnají.

Počet kuliček jednotlivých barev, které se během „experimentu“ nacházejí v klobouku, popíšeme pomocí trojčlenného vektoru, jehož první, druhá a třetí složka bude v tomto pořadí určovat počet červených, modrých a zelených kuliček v klobouku; počáteční stav bude tedy popsán vektorem $\boldsymbol{u} = (9, 11, 13)$. Je zřejmé, že tento vektor se po vytažení dvou kuliček téže barvy a jejich vrácení do klobouku nezmění. Vytáhneme-li však dvě kuličky různých barev, např. modrou se zelenou, a vrátíme-li do klobouku (v tomto případě) dvě červené, bude tento nový stav popsán vektorem $(11, 10, 12)$, tj. vektorem $\boldsymbol{u} + (2, -1, -1)$. Vektor $\boldsymbol{u} + (-1, 2, -1) = (8, 13, 12)$ pak bude popisovat stav po vytažení červené se zelenou a následném vložení dvou kuliček modrých; podobně vektor $\boldsymbol{u} + (-1, -1, 2) = (8, 10, 15)$ popíše situaci po vytažení červené s modrou a vložení dvou zelených.

Odtud je vidět, že vektor

$$\boldsymbol{u} + k(2, -1, -1) + l(-1, 2, -1) + m(-1, -1, 2)$$

určuje, kolik je v klobouku kuliček jednotlivých barev po tom, co byla k-krát vytažena dvojice modrá se zelenou (a vloženy dvě červené), l-krát vytažena dvojice červená se zelenou (a vloženy dvě modré) a m-krát vytažena dvojice červená s modrou (a vloženy dvě zelené).

Daný problém můžeme tedy formulovat takto: *Existují celá nezáporná čísla k, l, m taková, že vektor*

$$(9, 11, 13) + k(2, -1, -1) + l(-1, 2, -1) + m(-1, -1, 2)$$

je roven některému z vektorů $(33, 0, 0)$, $(0, 33, 0)$, $(0, 0, 33)$*?*

Podívejme se nejprve, zda může nastat případ, že v určitém okamžiku budou v klobouku pouze červené kuličky. Z toho, co bylo řečeno výše, vyplývá, že to nastane právě tehdy, když existují celá nezáporná čísla k, l, m, která vyhovují soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} 9 + 2k - l - m &= 33 \\ 11 - k + 2l - m &= 0 \\ 13 - k - l + 2m &= 0 \end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíte, že taková čísla neexistují. Nemusíte tuto soustavu ani řešit: odečtete-li od první rovnice druhou, dostanete po úpravě rovnici

$$3(k - l) = 35,$$

které žádná celá čísla k, l, a tedy ani žádná čísla k, l celá nezáporná, nevyhovují. Znamená to, že uvedeným postupem nelze dosáhnout toho, aby v nějakém okamžiku byly v klobouku jenom kuličky červené.

Stejným způsobem se můžete přesvědčit, že v žádném okamžiku v klobouku nemohou být ani jen modré ani jen zelené kuličky. Tím je otázka položená v úvodu zodpovězena: *Popsaným způsobem nemůže dojít k tomu, aby v nějakém okamžiku byly v klobouku pouze kuličky stejné barvy.*

Ukážeme si ještě jiný přístup, ve kterém se obejdeme bez vektorů. Přiřadíme-li každé červené, každé modré a každé zelené kuličce po řadě číslo 0, 1 a 2, odpovídá kuličkám, které jsou v klobouku na počátku, číslo

$$9 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 13 \cdot 2 = 37.$$

Snadno se přesvědčíme, že tento součet se v úvodu popsanou „operací“ nezmění, nebo se zvětší o tři, nebo se zmenší o tři:

vytažením červené s modrou a vložením dvou zelených se zvětší o 3,

vytažením červené se zelenou a vložením dvou modrých se nezmění,

vytažením modré se zelenou a vložením dvou červených se zmenší o 3,

vytažením dvou kuliček stejné barvy a jejich zpětným vložením se nezmění.

Znamená to, že po žádné z těchto změn se součet odpovídající kuličkám v klobouku nezmění, nebo bude roven číslu 35 zvětšenému, nebo zmenšenému, o celistvý násobek tří, což je ve všech těchto případech číslo, které není dělitelné třemi. Protože však každému stavu, kdy v klobouku jsou jen kuličky stejné barvy, odpovídá jedno z čísel

$$\begin{aligned} 33 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 &= 0, \\ 0 \cdot 0 + 33 \cdot 1 + 0 \cdot 2 &= 33, \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 33 \cdot 2 &= 66, \end{aligned}$$

které třemi dělitelné je, nelze k němu tímto postupem žádným způsobem dojít.

Jestliže vás tato úloha zaujala, můžete si zkusit jedním nebo oběma uvedenými způsoby ukázat, že v případě sedmi červených, deseti modrých a třinácti zelených kuliček je možné popsaným postupem dojít k tomu, že v klobouku bude třicet kuliček stejné barvy.

* * * * *

M – POZDRAV PRE ROK **2008**

Koľkými nulami končí číslo, ktoré je súčinom prvých 2008 prvočísiel?

Rozdeľte daný štvorec na 2008 menších štvorcov.

Stanovte najmenšie prirodzené číslo, ktoré má ciferný súčet 2008.

Výsledky vlastného premýšľania sú hodnotnejšie
ako všetka získaná cudzia múdrosť.
(C. F. Gauss)

Dušan Jedinák