Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Šišma

Úloha o konvi

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 2, 1–11

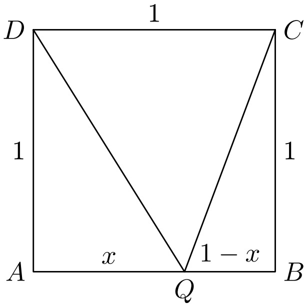
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146241

Úloha o konvi

Pavel Šišma, Ústav matematiky a statistiky, PřF MU Brno

Historický pohled na úlohu o konvi

Ve většině učebnic planimetrie pro střední školy nacházíme úlohu na užití osové souměrnosti,[1] kterou je možno zadat i takto: *Nedaleko břehu potoka, který je reprezentován přímkou AB, máme chatu v bodě D a skleník v bodě C, přičemž $ABCD$ je čtverec. Naším úkolem je vzít z chaty prázdnou konev, u potoka nabrat vodu a donést ji do skleníku. Ve kterém místě Q na břehu potoka nabereme do konve vodu, požadujeme-li, aby cesta DQC z chaty do skleníku byla co nejkratší?*



Obr. 1: Úloha o konvi

Je zřejmé, že v praxi se snažíme o to, aby cesta s těžkou plnou konví byla spíše kratší, takže oba úseky cesty DQ a QC poměřujeme „různým metrem“. Úlohu je pak možno například pro jednotkový čtverec $ABCD$ na obr. 1 formulovat tímto způsobem:[2] *Nedaleko břehu potoka, který je reprezentován úsečkou AB, máme chatu v bodě D a skleník v bodě C, přičemž $ABCD$ je čtverec. Naším úkolem je vzít z chaty prázdnou konev,*

---

[1] Viz např. Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia. Planimetrie*. Prometheus, Praha 2000, vydání 4. upravené, str. 127–128.

[2] Tento příklad nacházíme v článku Hrubý, D.: Trojúhelníková nerovnost aneb nošení vody v konvi. *Učitel matematiky*, 4 (1996), str. 205–212.

u potoka nabrat vodu a donést ji do skleníku. Cena za nesení prázdné konve z bodu D do bodu Q je 1 Kč/m a cena za nesení plné konve z bodu Q do bodu C je c Kč/m. Ve kterém místě Q na břehu potoka nabereme do konve vodu, požadujeme-li, aby celková cena y za přinesení vody do skleníku byla minimální?

Nyní jsme dostali problém, na který s osovou souměrností nevystačíme, a proto ho budeme řešit pomocí diferenciálního počtu. Snadno odvodíme, že pokud označíme x jako na obrázku délku úsečky AQ $(0 \leq x \leq 1)$, pak celková cena y je dána vztahem

$$y = \sqrt{1 + x^2} + c\sqrt{1 + (1 - x)^2}.$$

Hledáme-li minimum této funkce, pak řešíme rovnici

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{c(1 - x)}{\sqrt{1 + (1 - x)^2}} = 0,$$

kterou je možno upravit na algebraickou rovnici čtvrtého stupně ve tvaru

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + \frac{2c^2x}{1 - c^2} - \frac{c^2}{1 - c^2} = 0.$$

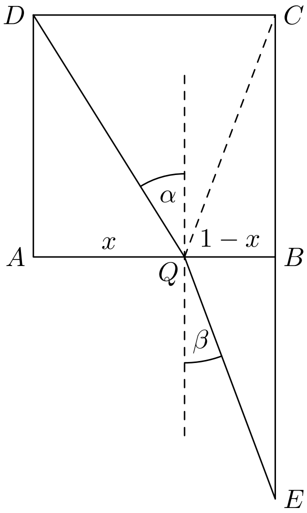
Třebaže víme, že algebraické rovnice čtvrtého stupně jsou řešitelné vzorci s odmocninami, je řešení naší rovnice v závislosti na parametru c mimořádně obtížné, a jsme proto odkázáni na přibližné výpočty kořenů rovnice pro jednotlivé hodnoty parametru c.

Ukážeme si, jak souvisí naše úloha o konvi s lomem světla.[3] Daný problém se totiž nezmění, poneseme-li plnou konev z bodu Q nikoli do bodu C, ale do bodu E, který je s ním souměrně sdružený podle osy AB (obr. 2).

Úlohu však můžeme chápat tak, že v polorovině ABD se z bodu D do bodu Q pohybuje jednotkovou rychlostí světelný paprsek, který se po lomu na rozhraní AB dále pohybuje v polorovině ABE rychlostí $v = \frac{1}{c}$ do bodu E. Víme, že funkce y představuje v tomto případě dobu, za kterou světelný paprsek dorazí po lomu v bodě Q z bodu D do bodu E.

[3] Tuto souvislost podrobně rozebral E. Calda v článku Calda, E.: Zákon lomu aneb nošení vody v konvi. *Učitel matematiky*, 5 (1996), str. 19–21.

Platí totiž
$$y = \frac{|DQ|}{1} + \frac{|QE|}{v} = |DQ| + c|QC|,$$
kde $\frac{|DQ|}{1}$ je doba, za kterou paprsek projde jednotkovou rychlostí z bodu D do bodu Q, a $\frac{|QE|}{v}$ je doba, za kterou rychlostí v dorazí paprsek z bodu Q do bodu E.



Obr. 2: Modifikovaná úloha o konvi

Doba potřebná k tomu, aby paprsek prošel zmíněnou dráhu DQE, je minimální právě tehdy, když je splněn zákon lomu, tedy když pro odchylky α, β paprsku od směru kolmého k přímce AB (obr. 2) platí
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{v} = c.$$

Tím je ovšem dáno také řešení úlohy o konvi. Je však i nadále přibližné, protože stanovení polohy bodu Q při lomu světla není (na rozdíl od prostého odrazu světla) možné pomocí pravítka a kružítka.[4)]

Vidíme tedy, že při řešení úlohy o konvi se dostáváme od planimetrie nejen k diferenciálnímu počtu, ale také k optice.

4) Podrobnosti najde čtenář v práci Beran, L.; Calda, E.: Eukleidovské konstrukce a lom světla. *MFI*, 4 (1994–95), str. 2–5, 55–57.

Úloha o konvi v prvních učebnicích diferenciálního počtu

Pro čtenáře *Rozhledů* bude určitě překvapením, že úlohu o konvi nalezneme v nejrůznějších podobách jako jednu ze základních úloh v pracích, které můžeme řadit k mezníkům formování diferenciálního počtu na konci 17. století. Zasloužili se o ně zejména I. Newton (1642–1727), G. W. Leibniz (1646–1716), bratři Bernoulliové, G. L'Hospital (1661 až 1704), L. Euler (1707–1783). Nebudeme se na tomto místě zabývat vznikem této matematické disciplíny a odkazujeme čtenáře na bohatou literaturu.[5)] Soustřeďme se pouze na podobu naší úlohy v nejvýznamnějších pracích Leibnize, Johana Bernoulliho (1667–1748) a L'Hospitala.[6)]

Leibniz

První prací, o které se zde zmíníme, je Leibnizův spis *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus*, který vyšel v roce 1684 v lipském časopise *Acta Eruditorum*. Jedná se o první publikovanou Leibnizovu práci věnovanou diferenciálnímu počtu, třebaže se touto problematikou zabýval již řadu let. Současně je to první publikované dílo o diferenciálním počtu vůbec. Použijeme-li dnešní pojmy a náš způsob vyjadřování, můžeme říci, že v tomto spisu Leibniz nejprve formuloval základní pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Pak ukázal, jak je možno diferenciálního počtu užít při nalezení maxima a minima funkce, ale také inflexního bodu křivky, která představuje graf funkce. Zvláštní pozornost zde Leibniz také věnoval výpočtu derivace funkcí $y = x^a$ a $y = \sqrt[b]{x^a}$.

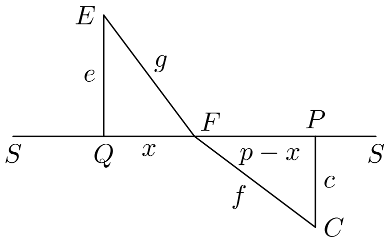
V další části se Leibniz snažil demonstrovat přednosti diferenciálního počtu před dosavadními metodami řešení úloh na nalezení maxima, minima a tečen křivek. Jeho výklad byl zpočátku spíše abstraktní, ale na-

5) Základní poučení nacházíme v historických poznámkách, kterými je bohatě doplněna současná učebnice diferenciálního a integrálního počtu pro gymnázia. Podrobnosti o jednotlivých osobnostech najdeme i na Internetu, zejména pak na adrese www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history.

6) Historii fyziky je věnováno výrazně méně publikací, a proto uveďme, že na rozdíl od zákona odrazu světla, který byl znám již ve starověkém Řecku, zákon lomu světla byl správným způsobem formulován až v 17. století. Mohlo k tomu dojít teprve tehdy, když byly známy základní trigonometrické poznatky, které umožnily řešení tohoto problému. Zákon lomu poprvé přesně formuloval Snellius (1580–1626) (Snellův zákon), ve své *Dioptrice* (1637) ho publikoval R. Descartes (1596–1650) a byli to Ch. Huygens (1629–1695) a především P. Fermat (1601–1665), kteří ho exaktně zdůvodnili. O Fermatově principu a lomu světla najde čtenář poučení v snadno dostupné práci Calda, E.: Odraz a lom světla a Fermatův princip. *Rozhledy matematicko–fyzikální*, 72 (1995), str. 62–67.

konec předložil pro ilustraci konkrétní úlohy.

Hned první úlohou je naše úloha o konvi, která byla doslovně uvedena takto (obr. 3): *Jsou dány dva body C a E a ve stejné rovině přímka SS.*[7] *Máme najít na přímce SS bod F tak, aby obsahy obdélníků o stranách CF a nějaké dané úsečce h a o stranách EF a nějaké dané úsečce r daly nejmenší možný součet. Když je tedy přímka SS hranicí mezi dvěma prostředími a h je hustota prostředí na straně bodu C, například vody, a r hustota prostředí na straně bodu E, například vzduchu, budeme hledat takový bod F, že cesta z bodu C do bodu E přes bod F bude nejlehčí.*



Obr. 3: Leibnizova úloha

Ve svém řešení Leibniz položil hodnotu součtu obsahů obdélníků rovnu w, označil $|CP| = c$, $|EQ| = e$ a $|PQ| = p$. Pro neznámou vzdálenost QF zavedl označení x, $|CF|$ označil f a $|EF|$ jako g. Protože platí $|FP| = p - x$, obdržel pro součet obsahů vztah[8]

$$w = h\sqrt{c^2 + p^2 - 2px + x^2} + r\sqrt{e^2 + x^2}.$$

Pro stručnost zápisu položil

$$\sqrt{c^2 + p^2 - 2px + x^2} = \sqrt{l} \quad \text{a} \quad \sqrt{e^2 + x^2} = \sqrt{m}.$$

Dostal tak vztah

$$w = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}.$$

---

[7] Takto nejednoznačně formuloval úlohu Leibniz, z jeho obrázku je zřejmé, že přímka SS dané body C a E odděluje. Dnešního čtenáře jistě zarazí i označení dvou různých bodů jedním písmenem S.

[8] Leibniz neužíval naši symboliku pro druhou mocninu a například p^2 zapsal jako pp. Bylo to tak v té době obvyklé a tento způsob zápisu nacházíme i v dalších pracích, o kterých budeme v tomto článku hovořit.

Pro minimum „funkce“[9] w pak musí platit $\mathrm{d}w = 0$, a tedy v našem případě Leibniz získal rovnici

$$0 = \frac{h\mathrm{d}l}{2\sqrt{l}} + \frac{r\mathrm{d}m}{2\sqrt{m}}.$$

Protože $\mathrm{d}l = -2(p-x)\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}m = 2x\mathrm{d}x$, došel Leibniz k rovnici

$$\frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g}.$$

A právě v tomto okamžiku Leibniz připomněl souvislost této úlohy se zákonem lomu světla, když poslední rovnici napsal ve tvaru

$$\frac{h}{r} = \frac{\frac{x}{g}}{\frac{p-x}{f}}.$$

Pro světelný paprsek, který vychází z bodu C, dopadá na rozhraní dvou prostředí v bodě F pod úhlem α a láme se do bodu E pod úhlem β, tak Leibniz obdržel vztah[10]

$$\frac{h}{r} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Leibniz prohlásil, že poměr sinů úhlů dopadu a lomu je v obráceném poměru k hustotám obou prostředí. Tím svoje řešení uzavírá.[11] My bychom ještě konstatovali, že rychlost světla je nepřímo úměrná „hustotě“ prostředí, a proto je výsledek ve shodě s nám známým vyjádřením zákona lomu.

Bernoulli a L'Hospital

V roce 1696 publikoval markýz Guillaume L'Hospital první učebnici diferenciálního počtu s názvem *Analyse des infiniment petits*. Dnes víme, že tato kniha vznikla mimo jiné na základě lekcí, které L'Hospitalovi poskytl o několik let dříve Johann Bernoulli, a kniha proto obsahuje řadu

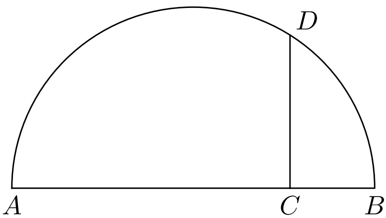
---

9) V pracích té doby se nehovoří o funkcích, ale spíše o veličinách či křivkách. Počítají se diferenciály místo derivací. Sám Leibniz použil slovo funkce poprvé až v roce 1694.

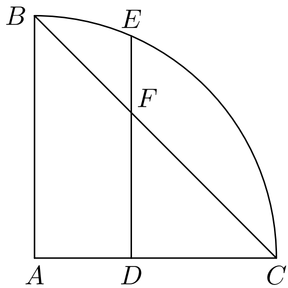
10) Leibniz položil v předcházející rovnici $f = g$, aby obdržel vztah, ve kterém zřejmě bylo v té době obvyklé zákon lomu vyjadřovat.

11) Leibniz podobné odvození zákonu lomu již dříve publikoval v roce 1682 rovněž v *Acta Eruditorum* (str. 185–190).

jeho původních výsledků (včetně známého „L'Hospitalova pravidla"). Až na počátku 20. století se podařilo nalézt rukopis Bernoulliho lekcí diferenciálního a integrálního počtu. Zatímco značná část integrálního počtu vyšla v roce 1742 tiskem pod názvem *Lectiones mathematicae de methodo integralium*, část věnovaná diferenciálnímu počtu byla publikována až v roce 1924 v rámci populární edice *Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften*. Analýzou L'Hospitalovy učebnice a dalších Bernoulliho matematických textů bylo zjištěno, že rukopis vznikl v letech 1691–92. Jak v tomto rukopisu, tak v L'Hospitalově učebnici je úloha o konvi obsažena.



Obr. 4: Úloha 14

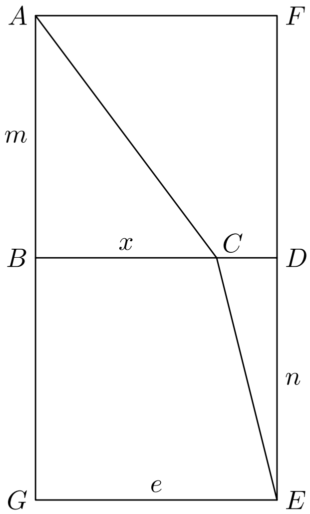


Obr. 5: Úloha 15

Bernoulli ve svém rukopisu nejprve vyložil základní pojmy diferenciálního počtu, poté odvodil nejdůležitější pravidla pro výpočet derivací a zbývající část věnoval aplikacím. Prvních jedenáct úloh je prakticky věnováno problematice nalezení tečen k různým křivkám. Poté přichází skupina úloh věnovaná určení maxima a minima funkce. V úloze 12 je dána úsečka, kterou máme rozdělit na dvě části tak, aby obdélník o stranách délek odpovídajících délkám obou částí měl maximální obsah. Úloha 13 požaduje rozdělit podobným způsobem úsečku na tři části, aby kvádr o stranách rovných jednotlivým částem měl maximální objem. V úloze 14 je dána polokružnice o průměru AB. Na oblouku polokružnice hledáme bod D tak (obr. 4), aby obdélník o stranách AC a CD měl maximální obsah. Konečně v úloze 15 je dána čtvrtkružnice omezená kolmými poloměry AB a AC. Hledáme bod D na úsečce AC tak, aby obdélník o stranách DF a FE měl maximální obsah (obr. 5).

Přejděme však k úlohám 16 a 17, jež jsou ekvivalentní problematice lomu a odrazu světla, přičemž lom překvapivě předchází odrazu, i když řešení úlohy o odrazu je snažší. Je třeba ihned říci, že Bernoulli se o možném optickém významu ani v jedné z obou úloh nezmiňuje.

Úloha shodná s naší úlohou o konvi je v Bernoulliho rukopisu formulována pod číslem 16 takto: *Chodec se nachází v bodě A a hledá cestu do bodu E, přitom musí překonat nejprve rovné a upravené pole $AFDB$ a poté nerovné a hrbolaté pole $DBGE$. Přitom na prvním poli urazí v čase a vzdálenost b a na druhém poli ve stejném čase vzdálenost c. Ptáme se na nejkratší cestu z bodu A do bodu E, tedy na cestu, na které stráví pocestný nejkratší dobu.*



Obr. 6: Úloha o konvi v Bernoulliho rukopisu

Situaci zachycuje obr. 6. Bernoulli označil bod, v němž poutník protne hranici obou polí, jako C, a položil $|AB| = m$, $|ED| = n$, $|BC| = x$, $|BD| = e$. Pak doba, za kterou dojde poutník z bodu A do bodu E přes bod C, je rovna

$$\frac{a}{b}\sqrt{m^2 + x^2} + \frac{a}{c}\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + n^2}.$$

Její diferenciál musí být roven 0, tedy

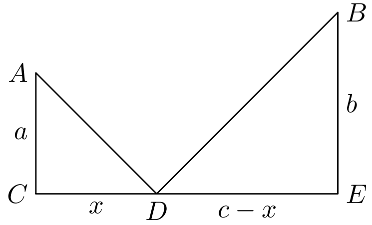
$$\frac{ax\mathrm{d}x}{b\sqrt{m^2 + x^2}} + \frac{ax\mathrm{d}x - ae\mathrm{d}x}{c\sqrt{e^2 - 2ex + x^2 + n^2}} = 0.$$

Podobně jako my dochází Bernoulli k algebraické rovnici čtvrtého stupně, tentokrát ve tvaru

$$(b^2 - c^2)x^4 - 2e(b^2 - c^2)x^3 + (b^2m^2 + b^2e^2 - c^2e^2 - c^2n^2)x^2 - \\ - 2b^2em^2x + b^2e^2m^2 = 0.$$

Pro Bernoulliho zde úloha končí a řešením rovnice se nezabývá. Jak již bylo řečeno, neuvažuje ani optickou interpretaci zkoumané situace.

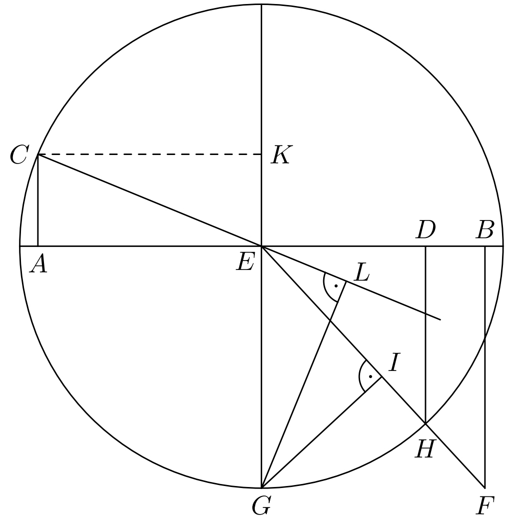
Podobně je tomu i u jednodušší následující úlohy 17 Bernoulliho rukopisu, kde je však výsledná rovnice kvadratická, takže ji lze snadno vyřešit jak početně, tak i konstrukčně (pomocí pravítka a kružítka). Na úsečce CE kolmé k oběma úsečkám AC a BE máme najít bod D tak, aby součet délek úseček AD a DB byl minimální (obr. 7). Označíme-li $|AC| = a$, $|BE| = b$, $|CE| = c$ a $|CD| = x$, pak hledané x nabývá hodnoty $x = \frac{ac}{a+b}$.



Obr. 7: Úloha o lomu světla v Bernoulliho rukopisu

Na závěr ještě uveďme, že následující 18. úloha v Bernoulliho rukopisu je velmi podobná úloze 15 o čtvrtkružnici. Tentokrát se Bernoulli zajímá, pro kterou polohu bodu D je velikost úsečky FE maximální (obr. 5). Není příliš jasné, proč tuto obměnu úlohy 15 Bernoulli zařadil až za úlohy 16 a 17. V rukopisu pak najdeme ještě tři další úlohy: 19. úlohu bychom mohli zařadit mezi problémy fyzikální statiky, ve 20. úloze Bernoulli hledá den nejkratšího soumraku, 21. úloha je vlastně výklad postupu určení inflexního bodu funkce.

Jak jsme se již zmínili, na základě tohoto nebo podobných Bernoulliho textů vznikla L'Hospitalova učebnice z roku 1696. Bernoulli v roce 1692 navštívil Paříž, kde seznámil L'Hospitala se základy infinitezimálního počtu a spolupracoval s ním i v dalších letech. L'Hospitalova učebnice sloužila dlouhou dobu jako základní učebnice diferenciálního počtu, zejména však v první polovině 18. století. Vyšla v dalších vydáních v letech 1716, 1720 a 1768.



Obr. 8: Úloha o konvi v L'Hospitalově učebnici

Úloha o konvi je ve třetí kapitole L'Hospitalovy učebnice (jako úloha 11) formulována prakticky stejně jako v Bernoulliho rukopisu. Situace je zachycena na obr. 8. Pocestný se pohybuje z bodu C do bodu F přes rozhraní AB, na němž hledáme bod E tak, aby cesta z C do F přes E trvala nejkratší dobu. Přitom z bodu C do bodu E se pocestný pohybuje tak, že v čase c urazí dráhu a, a z bodu E do bodu F takovým způsobem, že ve stejném čase urazí vzdálenost b. L'Hospital předložil dvě řešení tohoto problému. Druhé řešení je až na označení totožné s řešením Leibnizovým nebo Bernoulliovým. Budeme se proto zabývat pouze řešením prvním.

L'Hospital nejprve upozornil na souvislost úlohy 11 o pocestném s předchozí úlohou 9, ve které vyřešil problém lomu světla formulovaný podobně, jako jsme ho viděli v Leibnizově práci. Na základě toho L'Hospital získal poněkud nezvykle vyjádřený vztah

$$\frac{\sin(\angle GEC)}{\sin(\angle GEF)} = \frac{a}{b}.$$

L'Hospital ukázal, jak lze takový výsledek využít pro nalezení polohy bodu E. Sestrojíme-li v bodě G kolmice na přímky CE a EF, obdržíme paty kolmic L a I. Trojúhelníky ACE a LEG jsou shodné podle věty *usu*, podobně jako trojúhelníky EDH a GIE. Platí tedy $|GI| = |ED|$. Podle zákona lomu (představme si ho v spíše ve tvaru, jak ho známe ze střední školy), je

$$\frac{\sin(\angle ACE)}{\sin(\angle GEI)} = \frac{|AE|}{|GI|} = \frac{|AE|}{|ED|} = \frac{a}{b}.$$

Označíme-li $|AE| = x$, pak platí $|ED| = \frac{bx}{a}$. L'Hospital pak položil $|AB| = f$, $|AC| = g$, $|BF| = h$ a z podobnosti trojúhelníků EBF a EDH vyjádřil $|DH| = \frac{bhx}{af-ax}$. Protože $|CE| = |EH|$, máme podle Pythagorovy věty

$$|ED|^2 + |DH|^2 = |EA|^2 + |AC|^2.$$

Dosadíme-li do této rovnosti, dostáváme

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^2h^2x^2}{a^2f^2 - 2a^2fx + a^2x^2} = x^2 + g^2.$$

Úpravou získáme rovnici čtvrtého stupně

$$(a^2 - b^2)x^4 - 2f(a^2 - b^2)x^3 + (a^2f^2 + a^2g^2 - b^2f^2 - b^2h^2)x^2 - \\ - 2a^2fg^2x + a^2f^2g^2 = 0.$$

Ani L'Hospital se dalším řešením této rovnice nezabývá a přistupuje k druhému odvození této rovnice prostředky diferenciálního počtu, které zde, jak jsme vysvětlili, uvádět nebudeme.

Závěr

Naším cílem nebylo zachytit kompletně vývoj „úlohy o konvi" v historii diferenciálního počtu. Soustředili jsme se pouze na texty posledních dvaceti let 17. století, které významným způsobem ovlivnily další vývoj (v případě Bernoulliho rukopisu jen zprostředkovaně, prostřednictvím hojně užívané L'Hospitalovy učebnice). Úloha o lomu světla sloužila jako vhodný aplikační příklad jistě i v dalších učebnicích diferenciálního počtu, a bylo by ji proto asi možno sledovat i v dalším období. Nelze však předpokládat, že by pojetí výkladu mohlo být nějak výrazně odlišné od druhého řešení v L'Hospitalově učebnici.