Dušan Jedinák

Vyskúšajte si svoj dôvtip

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 83 (2008), No. 1, 41–43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146236

# PRO ŽÁKY ZÁKLADNÍCH ŠKOL

## Vyskúšajte si svoj dôvtip

*Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave*

Ponúkam trochu netradičné využitie základných matematických vedomostí. Zdá sa mi, že príklady, ktoré tu predkladám, môžu byť podnetné a primerané aj vo vyšších ročníkoch základnej školy a v prvých ročníkoch stredných škôl. Každý z nich prináša pomerne krátky, ale myšlienkovo sústredený postup.

**Úloha 1.** Doplňte za každý znak $\bullet$ jednociferné prvočíslo, aby bolo znázornené násobenie správne:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & \times & & \bullet & \bullet \\
\cline{2-5}
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\hline
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
$$

*Riešenie:* Jednociferné prvočísla sú iba 2, 3, 5, 7. Pretože súčiny $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, $7 \cdot 7$ nemajú na konci prvočíslo, môžu byť poslednými ciframi oboch násobených čísel iba dvojice 3, 5; 5, 3; 5, 5; 5, 7; 7, 5. Skúšaním zistíme, že existuje iba jediné riešenie:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 7 & 7 & 5 \\
 & \times & & 3 & 3 \\
\cline{2-5}
 & 2 & 3 & 2 & 5 \\
2 & 3 & 2 & 5 & \\
\hline
2 & 5 & 5 & 7 & 5
\end{array}
$$

**Úloha 2.** Štyria chlapci – Adam, Boris, Cyril a Dušan – chcú prejsť cez tmavý podchod. Adamovi trvá cesta cez podchod minútu, Borisovi dve minúty, Cyrilovi štyri a Dušanovi päť minút. Podchod je tak úzky, že ním môžu prejsť naraz najviac dvaja chlapci. Majú k dispozícii jednu lampu, ktorá vydrží svietiť 12 minút. Je možné, aby všetci chlapci prešli cez tmavý podchod tak, aby nikto z nich nemusel prechádzať potme? Ak prechádzajú podchodom dvaja chlapci spoločne, idú rýchlosťou pomalšieho z nich.

*Riešenie:* Ak na začiatku prejde cez podchod Adam s Borisom, cesta im bude trvať dve minúty. Jeden z nich sa musí vrátiť. Ak sa vráti Boris, cesta späť mu opäť bude trvať dve minúty (spolu 4 minúty). Ak druhýkrát pôjdu cez podchod Cyril s Dušanom, cesta im bude trvať päť minút (spolu 9 minút). Na konci podchodu vrátia lampu Adamovi, ktorý sa cez podchod vráti za minútu a spolu s Borisom ho opäť prejdú za dve minúty. To znamená, že všetci chlapci môžu prejsť na druhú stranu podchodu a cesta im bude trvať $2+2+5+1+2=12$ minút

**Úloha 3.** Rozložte číslo 2 všetkými rôznymi spôsobmi na súčet štyroch rôznych zlomkov s čitateľmi rovnajúcimi sa jednotke a prirodzenými číslami v menovateľoch.

*Riešenie:* Je potrebné vyriešiť rovnicu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=2,$$

aby $x$, $y$, $z$, $t$ boli rôzne prirodzené čísla. Pretože zlomky majú byť rôzne, musí pre aspoň jeden z nich, napr. pre $\frac{1}{x}$, platiť

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<2, \quad \text{tj} \quad 2>x>\frac{1}{2}.$$

Teda pre $x \in \mathbb{N}$ z toho vyplýva, že $x=1$. Potom je $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$ a tiež

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{y}<1, \quad \text{tj} \quad 3>y>1,$$

teda pre $y \in \mathbb{N}$ je $y=2$. Tým potrebujeme, aby $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$. Znovu bude potrebné aby platilo napr.

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{z}<\frac{1}{2}, \quad \text{tj} \quad 4>z>2,$$

teda pre $z \in \mathbb{N}$ z toho vyplýva, že $z=3$. Potom už vyhovuje iba $t=6$.

Skúška:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=2$$

**Úloha 4.** Koľko usporiadaných trojíc prirodzených čísiel $x$, $y$, $z$ vyhovuje vzťahu $x \cdot y \cdot z = 10^6$?

*Riešenie:* Číslo $10^6$ môžeme rozložiť na súčin mocnín prvočísiel ako $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. Hľadaný rozklad $x \cdot y \cdot z = 10^6$ môžeme potom „vidieť“ ako $(2^a \cdot 5^p) \cdot (2^b \cdot 5^q) \cdot (2^c \cdot 5^r) = 2^6 \cdot 5^6$, kde $x = 2^a \cdot 5^p$, $y = 2^b \cdot 5^q$, $z = 2^c \cdot 5^r$, $a + b + c = 6$, $p + q + r = 6$, kde $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $r$ sú nezáporné celé čísla.

Možností pre $a + b + c = 6$, ak $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, je 28, ako ukazuje schéma:

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{array}$$

Taký istý počet možností je aj pre $p + q + r = 6$. Pretože ku každej trojici $a, b, c$ možeme pripojit ľubovoľnú trojicu $p, q, r$, je počet všetkých možností pre $x, y, z$ rovný $28 \cdot 28 = 784$.

* * * * * * *

$$\begin{array}{r} 777777777777 \\ \times\, 777777777777 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 \\ 777 \\ 77777 \\ 7777777 \\ 777777777 \\ 77777777777 \\ 7777777777777 \\ 777777777777777 \\ 77777777777777777 \\ 7777777777777777777 \\ 777777777777777777777 \\ 77777777777777777777777 \\ \hline 86419753086246913580247 \\ \times 7 \\ \hline 604938271603728395061729 \end{array}$$

---

Vánoční stromeček z knihy B. A. Korděmského *Matematické prostocviky* vybral M. Závodný.