Rozhledy matematicko-fyzikální

Jaromír Šimša

O páté úloze z MMO 2007

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 83 (2008), No. 1, 14–18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146232

O páté úloze z MMO 2007

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

V čísle 4 ročníku 82 (2007) jsme otiskli celkovou zprávu o 48. ročníku Mezinárodní matematické olympiády, která se konala v červenci 2007 ve Vietnamu. Nyní se budeme věnovat páté z šestice hanojských úloh, která měla jedno z nejkratších zadání v bezmála padesátileté historii této soutěže:

Kladná celá čísla a, b jsou taková, že číslo $(4a^2-1)^2$ je dělitelné číslem $4ab-1$. Dokažte, že $a=b$.

Nejprve se seznámíme se stručným, avšak úplným vzorovým řešením této úlohy. Nenechte se jeho obtížností odradit. Postup budeme totiž v další části článku komentovat, a tak si osvojíme jeho základní kroky, které vypadají při prvním čtení velmi nečekaně a rafinovaně. Uvidíme, že takové obraty mají obecnější povahu, a lze je proto využít i při řešení dalších úloh z teorie čísel.

Pusťme se tedy nejprve do řešení úlohy ve stopách jejího autora a očíslujme přitom vztahy, ke kterým se později vrátíme. Z podmínky $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$ a rovnosti pro rozdíl čtverců

$$b^2(4a^2-1)^2-(a-b)^2=a(4ab-1)(4a^2b+a-2b) \tag{1}$$

vyplývá, že číslo $4ab-1$ dělí i číslo $(a-b)^2$ z levé strany:

$$4ab-1 \mid (a-b)^2 \tag{2}$$

Připusťme, že vztah (2) splňuje nějaká dvojice (a,b) přirozených čísel s vlastností $a \neq b$. S ohledem na symetrickou roli čísel v (2) můžeme dále předpokládat, že $a>b$. Pak odpovídající rovnost

$$(a-b)^2=m(4ab-1), \tag{3}$$

kde m je vhodné přirozené číslo, přepíšeme do tvaru

$$(a-b-2mb)^2=(2mb)^2+4mb^2-m.$$

Celé číslo $t = |a-b-2mb|$ je podle poslední rovnosti jistě větší než $2mb$, neboť $4mb^2 - m > 0$. Vzhledem ke zřejmým nerovnostem

$$t^2 = (2mb)^2 + 4mb^2 - m < 4m^2b^2 + 4mb^2 < (2mb+b)^2$$

však musí zároveň platit $t < 2mb + b$, dohromady tedy $t = 2mb + b - c$, kde celé číslo c splňuje nerovnosti

$$0 < c < b \ (< a). \tag{4}$$

Z rovností $(2mb + b - c)^2 = t^2 = (2mb)^2 + 4mb^2 - m$ dostaneme vztah

$$(b-c)^2 = m(4bc-1), \tag{5}$$

z něhož vidíme, že $4bc - 1 \mid (b-c)^2$. Dvojice (b, c) proto splňuje tutéž podmínku (2) jako dvojice (a, b), takže k ní můžeme znovu uplatnit předchozí postup. Podle (4) je ovšem nová dvojice (b, c) v každé z obou složek menší než původní dvojice (a, b). Protože složky uvažovaných dvojic jsou přirozená čísla, můžeme celou proceduru zmenšování složek zopakovat pouze několikrát; po určitém počtu kroků proto dojdeme ke dvojici různých přirozených čísel, k níž už není možné proceduru uplatnit, a to je spor. Žádná dvojice *různých* přirozených čísel a, b splňující vztah (2) proto neexistuje. Tím je pátá úloha z 48. MMO úplně vyřešena.

Pokud jste předchozí text četli pozorně a porozuměli všem úvahám, uznáte, že postup je správný a vede k cíli. Zdá se vám však patrně nepochopitelné, jak někoho mohla napadnout identita (1) nebo netušený přechod od rovnosti (3) k rovnosti (5). V dalším uvidíte, že i pro tuto úlohu lze výše uvedené, elegantně vycizelované řešení dostat z počátečních, nehotových úvah a výpočtů, jež napadnou i méně „geniální" řešitele, kteří však mají v úlohách z teorie čísel určitou zkušenost.*) Nenechte se podobnými vzorovými texty deprimovat, jejich autoři je často dlouho vybrušovali. Spotřebitelsky vyjádřeno: obdobné koncentráty myšlenek je vhodné při duševní konzumaci rozředit.

*) Chcete-li se naučit řešit obtížnější matematické úlohy, o podobný *rozbor vzorových postupů* byste se měli pokusit vždy, když výkladu řešení nějaké úlohy vcelku rozumíte, ale uniká vám smysl jednotlivých dílčích kroků (či spíše triků). Získáte tím více umu, než když pouze pročtete třeba i větší množství řešených úloh. Vyplatí se ovšem pokaždé, alespoň na chvíli, zkusit řešit novou úlohu vlastními silami, než se rovnou dát do čtení jejího řešení.

V první části našeho komentáře se pochopitelně budeme zabývat objevem klíčového vztahu (2). Je možné tuto podmínku dělitelnosti odhalit, aniž nás rovnou napadne rozklad (1)? Podívejme se proto, zda nám při zadané podmínce $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$ může pomoci *algebra mnohočlenů.* Lze z dělence $(4a^2-1)^2$ obecně vyčlenit nějaký násobek dělitele $4ab-1$? V oboru mnohočlenů je to nesplnitelný úkol, neboť dělenec neobsahuje proměnnou b. Pomůžeme si proto tak, že dělence $(4a^2-1)^2$ donásobíme mocninou b^2, abychom do jeho základu $4a^2-1$ dostali činitel b. V pozměněném základu $4a^2b-b$ pak podle členu $4a^2b$ vyčleníme násobek $a(4ab-1)$ dělitele $4ab-1$. Dosavadní úpravy vyjádříme rovností

$$b^2(4a^2-1)^2 = (4a^2b-b)^2 = (a(4ab-1)+a-b)^2.$$

Poslední mocninu upravíme podle vzorce pro $(X+Y)^2$:

$$(a(4ab-1)+a-b)^2 = a^2(4ab-1)^2 + 2a(4ab-1)(a-b) + (a-b)^2$$

Z takto získané algebraické rovnosti

$$b^2(4a^2-1)^2 = a^2(4ab-1)^2 + 2a(4ab-1)(a-b) + (a-b)^2 \qquad (6)$$

již plyne závěr: *splňují-li celá čísla a, b podmínku $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$, platí rovněž i vztah $4ab-1 \mid (a-b)^2$.* Z rovnosti (6) už snadno „vykouzlíte" identitu (1) z úvodu vzorového řešení. Pro zajímavost ještě dodejme, že užité donásobení činitelem b^2 zadanou podmínku úlohy v podstatě nezmění, neboť hodnoty $4ab-1$ a b^2 jsou zřejmě nesoudělná čísla. Znamená to, že podle rovnosti (6) pro libovolná celá čísla a, b dokonce platí

$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2 \iff 4ab-1 \mid (a-b)^2.$$

Obrátíme teď naši pozornost na zdánlivě neobvyklý postup, kterým byla z rovnosti (3) odvozena analogická rovnost (5). Vedly provedené úpravy a substituce k tak působivému závěru opravdu jen náhodou? Zapišme nejprve k rovnosti (3) příslušnou kvadratickou rovnici

$$(x-b)^2 = m(4bx-1), \qquad (7)$$

o které víme, že má celočíselný kořen $x_1 = a$. *V takové situaci se v úlohách z teorie čísel často vyplatí uvažovat i o druhém kořenu x_2 dané rovnice.* Přepíšeme-li rovnici (7) do obvyklého tvaru

$$x^2 - 2(2m+1)bx + m + b^2 = 0, \qquad (8)$$

zjistíme, že podle Viètových vztahů platí

$$x_1 + x_2 = 2(2m+1)b \quad \text{a} \quad x_1 \cdot x_2 = m + b^2. \tag{9}$$

Protože čísla $x_1 = a$ a $2(2m+1)b$ jsou celá, z první rovnosti (9) vyplývá, že i číslo x_2 je celé. A protože navíc $x_1 = a > 0$ a $m + b^2 > 0$, je podle druhé rovnosti (9) i číslo x_2 kladné. Našli jsme tedy druhé přirozené číslo x_2, které stejně jako číslo $x_1 = a$ vyhovuje rovnici (7), tedy splňuje podmínku $4bx - 1 \mid (x-b)^2$ úlohy, kterou řešíme. Bude tedy zajímavé zjistit, jak jsou tyto kořeny velké v porovnání s číslem b.

Stejně jako ve vzorovém řešení navrhneme, že se budeme zabývat pouze případem $a > b$. Je pak kořen x_2 menší než kořen $x_1 = a$, nebo je dokonce menší než číslo b? Rutinními (byť ne třeba nejkratšími) úpravami nerovností zjistíme, že správná je druhá, silnější hypotéza $x_2 < b$. Podáme zde elegantní vysvětlení, když ukážeme, že platí nerovnost $(x_1-b)(x_2-b) < 0$. K tomu využijeme obě rovnosti (9), podle kterých

$$\begin{aligned}(x_1 - b)(x_2 - b) &= x_1x_2 - (x_1 + x_2)b + b^2 = \\ &= (m + b^2) - 2(2m+1)b^2 + b^2 = \\ &= m - 4mb^2 = m(1 - 4b^2) < 0.\end{aligned}$$

Ani tento obrat nebyl příliš trikový, neboť jsme počítali hodnotu levé strany rovnice (8) pro $x = b$, když jsme předem dobře věděli, v jakou nerovnost přejde ekvivalentní rovnice (7) po dosazení $x = b$ – podívejte se na to sami. Zjistíte tak, že pro jakákoliv daná reálná čísla b, m, pro něž $m(4b^2 - 1) > 0$, má rovnice (7) v oboru reálných čísel dva různé kořeny $x_2 < b < x_1$.

Běžnými úvahami o kvadratické rovnici jsme tedy objevili přirozené číslo $c = x_2$, které ve vzorovém řešení splňuje vztahy (4) a (5). Zbývá okomentovat závěrečnou autorskou úvahu o zmenšování dvojic, která je uplatněním v teorii čísel hojně užívané *metody nekonečného sestupu.**) Protože jsme tuto proceduru v samotném vzorovém řešení podrobně popsali, ukážeme teď její užitečnost ještě na jiné, jednodušší úloze:

V oboru nezáporných celých čísel x, y, z vyřešíme rovnici

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3. \tag{10}$$

*) Mezi soutěžícími všech zemí na 48. MMO se nenašel nikdo, kdo by úlohu úspěšně vyřešil jinou metodou.

Trojice $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ je zřejmě řešení. Připusťme, že existuje ještě nějaké jiné řešení (x_1, y_1, z_1) rovnice (10). Vysvětlíme nejprve, že pak již žádné z nezáporných celých celých x_1, y_1, z_1 se nemůže rovnat nule. Kdyby například platilo $x_1 = 0$, měli bychom rovnost $2y_1^3 = 4z_1^3$, neboli $y_1 \sqrt[3]{2} = z_1$, která ovšem je pro celá y_1, z_1 splněna jedině v případě $y_1 = z_1 = 0$, neboť číslo $\sqrt[3]{2}$ je iracionální. Podobně vyloučíme případy $y_1 = 0$, resp. $z_1 = 0$.

Nechť tedy v rovnosti $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$ jsou všechna tři celá čísla x_1, y_1, z_1 kladná. Z vypsané rovnosti vidíme, že číslo x_1 je nutně sudé, takže $x_1 = 2x_2$ pro některé celé x_2, $0 < x_2 < x_1$. Po dosazení dostaneme rovnost $8x_2^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$, neboli $4x_2^3 + y_1^3 = 2z_1^3$, ze které zase plyne $y_1 = 2y_2$ pro některé celé y_2, $0 < y_2 < y_1$. Po opětovném dosazení dostaneme rovnost $4x_2^3 + 8y_2^3 = 2z_1^3$, neboli $2x_2^3 + 4y_2^3 = z_1^3$, ze které máme $z_1 = 2z_2$ pro některé celé z_2, $0 < z_2 < z_1$. Dosadíme-li ještě jednou, dostaneme rovnost $2x_2^3 + 4y_2^3 = 8z_1^3$, neboli $x_2^3 + 2y_2^3 = 4z_2^3$. To však znamená, že nová trojice (x_2, y_2, z_2) je stejně jako trojice (x_1, y_1, z_1) řešením rovnice (10) a přitom platí $0 < x_2 < x_1$, $0 < y_2 < y_1$, $0 < z_2 < z_1$. Nyní k řešení (x_2, y_2, z_2) stejným způsobem sestavíme řešení (x_3, y_3, z_3), k řešení (x_3, y_3, z_3) řešení (x_4, y_4, z_4) atd. Metoda nekonečného sestupu nás opět dovede ke sporu, neboť žádná (nekonečná) klesající posloupnost sestavená z celých kladných čísel neexistuje.

Na úplný závěr uveďme spíše formální poznámku, že výklad metody nekonečného sestupu můžeme zapisovat zkráceně. Tak při našem řešení rovnice (10) jsme mohli rovnou vybrat řešení (x_1, y_1, z_1) s nejmenším možným číslem $x_1 > 0$ (kdyby nějaké existovalo) a dojít ke sporu již při nalezení trojice (x_2, y_2, z_2). Podobně při řešení páté hanojské úlohy jsme mohli ze všech dvojic (a, b), které splňují předpoklad $a > b$ a podmínku $4ab - 1 \mid (a - b)^2$, vybrat tu dvojici (a_1, b_1), ve které je číslo a_1 nejmenší možné. Na podstatě metody to však nic nemění.

* * * * *

*Tajomstvo a sláva matematiky nie je ani tak v tom, že sa abstraktné teórie ukazujú ako užitočné pri riešení problémov, ale v tom, že teória pripravená pre jeden typ problémov je často jedinou cestou pre riešenie problémov úplne iného druhu, problémov, pre ktoré táto teória nebola vymyslená.**)

Gian-Carlo Rota

*) Vybral Dušan Jedinák