A. Jančařík

Vývoj pojmů v algebře a matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82 (2007), No. 4, 9–14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146215

9. Závěr

Snažili jsme se ukázat, že skládání osových souměrností ve dvou různých geometriích se v podstatě kryje v případě různoběžnosti os a cesty se rozcházejí, pokud se narazí na problém rovnoběžnosti. Stále však platí, že „shodné zobrazení zůstává shodným zobrazením“.

Pro úplnost ještě přidejme jednu otázku. Kromě klasické eukleidovské a Lobačevského geometrie existuje ještě tzv. Riemannova geometrie, ve které neexistují nerůznoběžky, tzn. různé kolmice na danou přímku se vždy protínají. Jak je to se shodnými zobrazeními v tomto případě?

Vývoj pojmů v algebře a matematická olympiáda

Antonín Jančařík, PedF UK Praha

1. Úvod

Matematika, jako jedna z nejstarších vědních disciplín, procházela v průběhu minulých století a tisíciletí složitým vývojem. Během staletí nedocházelo jen k rozšiřování poznání a získávání nových vědomostí, ale také k vývoji jednotlivých pojmů, jejich utváření a zobecňování. Matematika byla často úzce spjata s filozofií a teologií. Například chápání a porozumění pojmu nekonečno není pouze otázkou matematickou, ale i filozofickou a teologickou. Také dokonalý svět geometrie vyžaduje pro své pochopení silnou míru abstrakce a dokonalost jeho objektů je velmi zajímavá i z pohledu filozofického.

Dnešní student či žák matematiky se seznamuje pouze s výsledky, deriváty tohoto vývoje. Časový rozsah, který lze výuce matematiky věnovat, nám nedovoluje opakovat všechny kroky a myšlenkové postupy, které k vytváření jednotlivých pojmů vedly. Navíc filozofické a teologické konstrukce, které byly s jednotlivými pojmy spjaté, jsou modernímu člověku často velmi vzdálené. Proto se nemůžeme divit, že žáci a studenti mají problémy porozumět tomu, co je přímka, bod či nekonečno.

Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

Tomuto tématu již bylo věnováno mnoho článků, knih a sborníků. V našem článku na jednom příkladu ukážeme, jak neznalost historického pozadí a prvotního významu pojmů ovlivňuje schopnost studentů řešit „jednoduché“ úlohy, a to i v tak „nefilozofické“ disciplíně, jako je algebra.

2. Vývoj algebry

Dnes nám nepřijde nic zvláštního na tom, že v matematice pracujeme s výrazy jako $3x^3+2x+1$. Z historického pohledu však k tomu bylo třeba provést několik intelektuálních skoků, z nichž každý byl ve své době převratný. Velmi důležité bylo (1) zavedení proměnné x, dále (2) zavedení mocnin a nakonec (3) umožnění práce s různými mocninami dohromady. Právě u tohoto třetího bodu je dobré se zastavit, protože z našeho dnešního pohledu se nám bude možná zdát nepochopitelný.

Všichni dobře víme, že při počítání nemůžeme míchat jablka s hruškami. Pracovat můžeme pouze s objekty, které k sobě patří – jsou v nějakém smyslu stejné. Po staletí se algebra vyvíjela jako nástroj pro popis geometrických objektů, teprve následně překročila svůj stín a stala se nástrojem, kterým dokážeme řešit i úlohy v geometrii neřešitelné. Na samém počátku ale algebra sloužila pro popis geometrických útvarů. Je zcela přirozené, že x reprezentovalo úsečku, x^2 plochu čtverce a x^3 objem krychle. Z tohoto pohledu dávat dohromady úsečku a krychli bylo naprosto nesmyslné. Pokud chtěli matematici pracovat s x a x^3, museli nejprve nějakým způsobem udělat z x reprezentaci prostorového objektu. Úvahy, které tento postup provázely, zde nebudeme opakovat. Pouze předvedeme výhody tohoto „historického“ přístupu na jedné úloze matematické olympiády.

3. Úloha z MO

V krajském kole 55. ročníku matematické olympiády kategorie B na jaře roku 2006 se objevila následující úloha:

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí:

$$1 \le a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c) \le 9$$

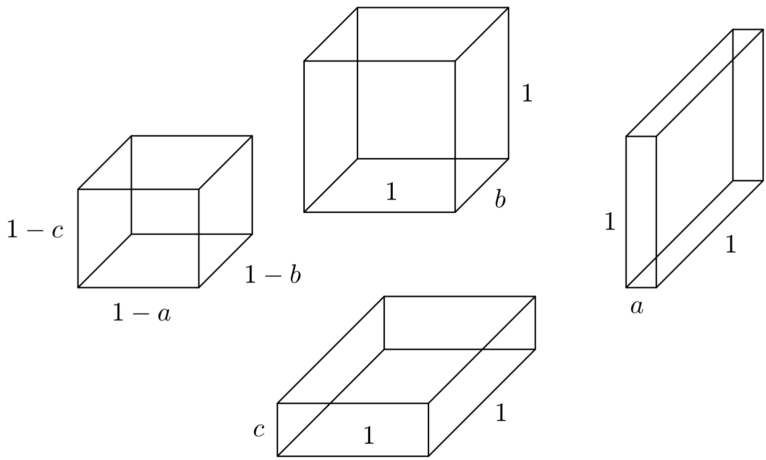
Tato úloha se stala kamenem úrazu pro naprostou většinu soutěžících. S první nerovností se vyrovnalo cca 15 % řešitelů, obě nerovnosti byly nad síly 98 % našich nejtalentovanějších žáků matematiky.

Ukážeme, jak jednoduchá geometrická interpretace zadání umožňuje okamžité řešení první nerovnosti a poměrně rychlé a elegantní řešení i druhé nerovnosti.

4. Důkaz první nerovnosti

Na první pohled je zřejmé, že všechny hodnoty v zadaném výrazu jsou kladné. Cílem naprosté většiny všech řešitelů bylo navzájem „kompenzovat“ přírůstky vzniklé $a+b+c$ a $3(1-a)(1-b)(1-c)$. Zde ovšem většinou nastal problém. Pokusme se mu vyhnout jednoduchou úvahou založenou právě na myšlence „nemíchání jablek s hruškami“.

Výraz $(1-a)(1-b)(1-c)$ zcela jasně reprezentuje objem kvádru o rozměrech $(1-a)$, $(1-b)$ a $(1-c)$. Abychom jej mohli srovnávat s a, b a c, musí i a, b a c reprezentovat objem nějakého tělesa. Nejjednodušší způsob je představit si, že a reprezentuje kvádr o rozměrech $a\times 1\times 1$, b kvádr o rozměrech $b\times 1\times 1$ a c kvádr o rozměrech $c\times 1\times 1$ (obr. 1).



Obr. 1

Nyní již k dokázání první nerovnosti stačí jednoduchá úvaha. Pokud ke kvádru o rozměrech $(1-a)\times(1-b)\times(1-c)$ přiložíme z příslušných stran kvádry o rozměrech $a\times 1\times 1$, $b\times 1\times 1$, $c\times 1\times 1$, dostaneme jednotkovou krychli a navíc možná dojde mezi kvádry o rozměrech $a\times 1\times 1$, $b\times 1\times 1$, $c\times 1\times 1$ k nějakým překryvům. Objem těchto čtyř kvádrů dohromady je však vždy minimálně 1 (neboť pokrývají jednotkovou krychli), a tím je první nerovnost dokázána.

5. Důkaz druhé nerovnosti

Pro důkaz druhé nerovnosti můžeme také použít obdobné geometrické úvahy. Důkaz nerovnosti bude proveden dvěma způsoby.

5.1. Přístup intuitivně geometrický

Nejprve, obdobně jako v předchozí části důkazu, složme dohromady dvakrát kvádr o rozměrech $(1-a)\times(1-b)\times(1-c)$ a kvádry o rozměrech $a\times b\times 1$, $a\times 1\times c$, $1\times b\times c$. Tímto složením dostaneme dvě (možná ne kompletní) jednotkové krychle a navíc čtyři kvádry o rozměrech $a\times b\times c$, které leží v průniku kvádrů o objemech $a\times b\times 1$, $a\times 1\times c$, $1\times b\times c$.

Poté složíme dohromady jeden kvádr o rozměrech $a\times b\times c$ a všechny čtyři kvádry použité v první nerovnosti. Tímto složením získáme jednotkovou krychli a navíc kvádry o rozměrech $a\times b\times 1$, $a\times 1\times c$, $1\times b\times c$, ležící v průniku jednotlivých sestavovaných částí.

Tím jsme použili všechny části v nerovnosti použité a obdrželi tři (možná necelé) jednotkové krychle, tři kvádry o rozměrech $a\times b\times c$ (z nichž každý lze vložit do jednotkové krychle) a tři kvádry o rozměrech $a\times b\times 1$, $a\times 1\times c$, $1\times b\times c$ (z nichž každý lze opět vložit do jednotkové krychle). Shledáváme, že všechny kvádry lze, při vhodném přeskládání, vměstnat do devíti jednotkových krychlí, a proto je jejich objem menší než devět nebo roven devíti. A tím je dokázána i druhá nerovnost.

Tento přístup vyžaduje jistou míru prostorové představivosti. Uvádím proto ještě jedno řešení, které sice vychází z geometrické představy, ale je orientováno více početně. Zároveň ukazuje, jak lze pomocí geometrických představ upravovat algebraické výrazy.

5.2. Přístup algebraicko-geometrický

Jednotkovou krychli lze, pomocí tří rovin, rozdělit na osm částí s objemy abc, $ab(1-c)$, $a(1-b)c$, $(1-a)bc$, $a(1-b)(1-c)$, $(1-a)b(1-c)$, $(1-a)(1-b)c$, $(1-a)(1-b)(1-c)$. Z této úvahy přímo dostáváme rovnost

$$abc+ab(1-c)+a(1-b)c+(1-a)bc+a(1-b)(1-c)+$$
$$+(1-a)b(1-c)+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)=1$$

pro všechna reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Zároveň každý z kvádrů použitých ve vyšetřovaném výrazu lze pokrýt jedním nebo více kvádry z předchozího rozdělení krychle, stačí tedy spočítat, kolikrát který kvádr z rozdělení musíme použít (například $a = abc + a(1-b)c + ab(1-c) + a(1-b)(1-c)$) a dostáváme

$$\begin{aligned} &a + b + c + 2(ab + bc + ac) + 3(1-a)(1-b)(1-c) = \\ &= 9abc + 4ab(1-c) + 4a(1-b)c + 4(1-a)bc + a(1-b)(1-c) + \\ &\quad + (1-a)b(1-c) + (1-a)(1-b)c + 3(1-a)(1-b)(1-c) \leq \\ &\leq 9[abc + ab(1-c) + a(1-b)c + (1-a)bc + a(1-b)(1-c) + \\ &\quad + (1-a)b(1-c) + (1-a)(1-b)c + (1-a)(1-b)(1-c)] = 9, \end{aligned}$$

čímž je dokázána i druhá nerovnost.

Uvedený přepis by šlo použít i pro důkaz první nerovnosti, neboť se ve výrazu vyskytuje každá z částí potřebných pro sestavení jednotkové krychle alespoň jednou.

6. Odhad extrémů

Na závěr ještě ukážeme, jak lze uvedené úvahy použít i pro zjištění, zda obě krajní řešení jsou pro některé hodny a, b, c možné.

Začneme horním odhadem. Z geometrických úvah vyplývá, že kvádr o objemu abc se vyskytuje ve všech „částečně“ složených krychlích. Volíme-li za a, b, c hodnotu 1, má výraz hodnotu devět, a tudíž náš odhad je nejlepší možný.

Nyní přistupme ke spodnímu odhadu. Při použití čtyř kvádrů, z původních dvanácti, na sestavení jednotkové krychle musí být objem všech zbylých osmi kvádrů nulový, musí tedy platit

$$ab + bc + ac = 0 \quad \text{a zároveň} \quad (1-a)(1-b)(1-c) = 0.$$

Druhý výraz je zjevně nulový, když alespoň jedno z čísel je rovno jedné a první výraz je roven nule, když alespoň dvě z čísel a, b, c jsou rovna nule. V takovém případě nedochází v sestavené jednotkové krychli k překryvům a skutečně platí

$$a + b + c + 2(ab + bc + ac) + 3(1-a)(1-b)(1-c) = 1.$$

Proto i spodní odhad výrazu je nejlepší možný.

7. Závěr

Uvedenou úlohu lze řešit i jinými způsoby, a to jak za pomoci algebraických úprav, tak za pomoci teorie lineárních funkcí, či parciálních derivací funkcí více proměnných. Se vzorovými řešeními se čtenář může seznámit na webových stránkách matematické olympiády `http://www.math.muni.cz/mo/`.

Řešitelé se o všechny tyto postupy v rámci soutěžního krajského kola pokoušeli. Mezi více než třemi sty studenty se však nenašel nikdo, kdo by byl schopen hodnotu a interpretovat jako objem kvádru o rozměrech $a \times 1 \times 1$ a tím úlohu vyřešit.

Uvedená skutečnost ukazuje, že nedostatek kompetencí používat vědomosti interdisciplinárně je problémem nejen mezipředmětovým, ale je problémem i mezi jednotlivými matematickými obory. Jsem přesvědčen, že převážná většina účastníků krajského kola matematické olympiády je schopna uvedené geometrické řešení nejen pochopit, ale v případě, kdy budou vědět, že a může reprezentovat i objem kvádru o vhodných stranách, i nalézt. Jako hlavní příčinu jejich neúspěchu proto vidím fakt, že si neuvědomili, že nelze míchat jablka s hruškami a že všechny hodnoty je nutné v geometrickém vyjádření interpretovat stejně – jako objem – a že taková interpretace je možná, neboť algebra z geometrie vychází.

Věřím, že tato a další obdobné úlohy jsou vhodným nástrojem, jak žáky na propojení mezi algebrou a geometrií upozorňovat.

* * * * *

OBĚŤ VZDĚLANOSTI

Nóbl hosté v restauraci Bellevue,
polévku dnes budou míti želevue.
Ze želvy, jež byla velmi vzdělaná,
která podle apórie Zenona
usoudila, že ji nikdo nedohoní.
Pod pokličkou hrnce nyní bycha honí.

*Emil Calda**)

*) *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003