Ondřej Pokorný

# GPS: Global Positioning System

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 82 (2007), No. 3, 11–17

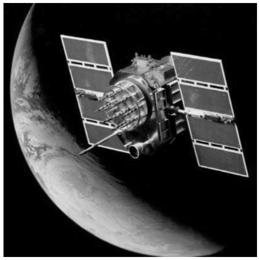
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146205

# GPS: Global Positioning System

*Ondřej Pokorný, Gymnasium Gmünd*

## 1. Z čeho se GPS skládá?

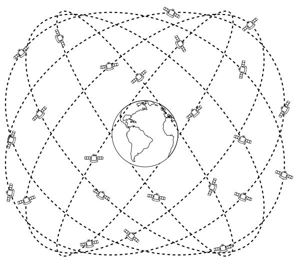
GPS tvoří systém 24 satelitů (obr. 1), které krouží kolem Země po eliptických (téměř kruhových) drahách v přibližné výšce 20 200 km nad zemským povrchem. Přitom se vždy 4 satelity pohybují v šesti různých rovinách, které jsou k sobě nakloněny pod úhlem 60° a s rovinou rovníku svírají úhel 50° (obr. 2). Podle 3. Keplerova zákona se dá snadno spočítat doba oběhu GPS satelitu, která se přibližně rovná dvanácti hodinám. Z toho plyne, že GPS satelity nejsou geostacionární! Vědci tento způsob rozmístění nezvolili náhodou. Díky němu se prakticky nad každým místem na Zemi nachází 4 satelity, které jsou nezbytné k přesnému určení polohy.



Obr. 1: Satelit

## 2. Jak GPS funguje?

Princip satelitní navigace je poměrně jednoduchý: Každý satelit nepřetržitě posílá datové pakety, které obsahují mimo jiné i přesný čas odeslání paketu a okamžitou polohu satelitu. Příjemce na Zemi určí čas přijetí paketu a vypočítá čas, který tento paket potřeboval, aby se k němu dostal (mezi 0,067 s a 0,086 s). Z tohoto času pak vypočítá vzdálenost od příslušného satelitu. Pomocí tří satelitů se dá určit pozice příjemce v prostoru.



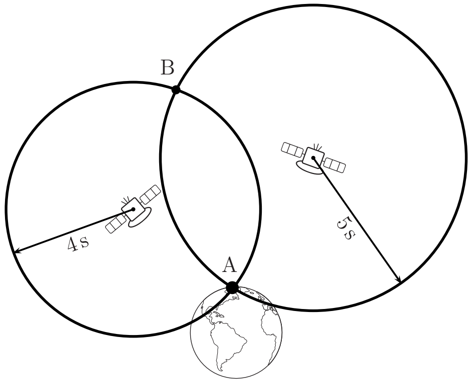
Obr. 2: Dráhy satelitů

Viděno ze satelitu se příjemce nachází na obalu koule, jejíž poloměr byl určen právě z doby letu paketu. Průnik dvou takových obalů je kružnice, která protíná třetí obal právě ve dvou bodech, z nichž jeden může být okamžitě vyloučen, protože se nenachází blízko zemského povrchu.

Tak jednoduché to v praxi ale bohužel není. Protože jsou signály přenášeny rychlostí světla (ve vakuu 299 792,5 km/s), jsou na přesnost měření kladeny enormní nároky: Chyba jedné tisíciny vteřiny v určení času příjmu způsobí chybu 300 km v určení vzdálenosti, a tím zhatí všechny plány naměření pozice s přesností okolo jednoho metru. Potřebné přesnosti se dá dosáhnout pouze s využitím atomových hodin. Na palubě satelitů se proto používají cesiové a rubidiové hodiny, které jsou pravidelně kontrolovány a seřizovány pěti zemskými stanicemi. Ale jen sama tato přesnost nestačí. Příjemce musí mít přece také přesné a se satelity seřízené atomové hodiny, nebo ne?

*2.1. Určení pozice*

Pro zjednodušení si ukážeme, jakým způsobem se v dvojrozměrném světě (který lze bez problémů nakreslit na papír) dá obejít fakt, že v přijímači prostě nemohou být atomové hodiny (obr. 3). Později už nebude problém tento způsob použít v reálném 3D prostoru.

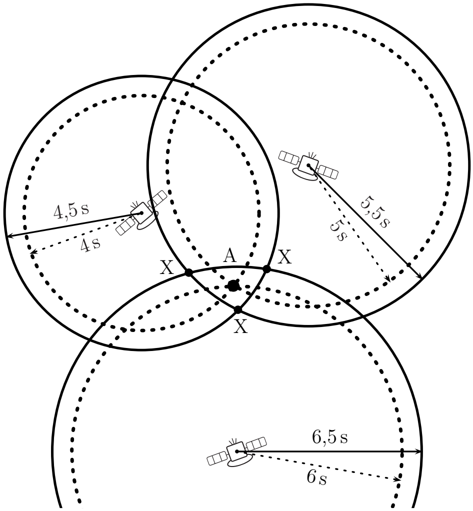



Obr. 3: 2D určení polohy s dvěma satelity

V našem případě určíme čas, který paket potřebuje k překonání vzdálenosti mezi satelitem a příjemcem, na 4 sekundy. (Tato hodnota je samozřejmě nerealisticky vysoká, ale jako příklad se hodí.) Když to celé provedeme s druhým paketem, který potřebuje 5 sekund, najdeme dva průsečíky těchto kružnic (body $A$ a $B$), kde se příjemce může nacházet. Bod $B$ ale můžeme okamžitě vyloučit, protože neleží na Zemi ani v její blízkosti.

Zatím jsme ignorovali jeden velice důležitý fakt. Víme, že hodiny všech satelitů běží přesně a synchronně. V přijímači vlastně potřebujeme stejnou přesnost, ale nikdy jí nemůžeme dosáhnout, protože si do našeho přenosného přijímače žádné atomové hodiny instalovat nemůžeme.

Zůstaňme u našeho příkladu a předpokládejme, že se hodiny našeho přijímače předcházejí o půl sekundy před hodinami satelitů. S touto chybou spočítáme, že k nám signály letí o půl sekundy déle než doopravdy. To vede k tomu, že si myslíme, že se nacházíme v bodě $X$ a ne v bodě $A$ (obr. 4). To při rychlosti světla znamená enormní chybu v určení pozice. Této chybě se ale nemůžeme vyhnout, musíme najít způsob, jak ji „obejít".




Obr. 4: 2D určení polohy s třemi satelity a korekcí chyby hodin přijímače

Přidáme-li do našeho systému ještě třetí satelit, je chyba hodin přijímače okamžitě patrná. Abychom získali jeden jediný průsečík všech kružnic, musíme postupně upravovat čas našich hodin (v hodinách satelitů chyba být nemůže) tak dlouho, dokud tyto tři průsečíky nesplynou v jeden. Pak jsou naše hodiny synchronní k hodinám satelitů. Jako příjemný vedlejší efekt jsme tedy získali i přesný čas v přijímači (s přesností atomových hodin!).

V našem příkladě dvojrozměrného světa jsou tedy nutné pakety tří satelitů, abychom byli schopni pozici přesně určit. V reálném světě, který má o jeden rozměr více, potřebujeme ještě jeden, čtvrtý satelit.

2.1.1. Proč tak často slyšíme, že 3 satelity stačí?

V praxi můžeme pracovat i s třemi satelity, abychom získali naši pozici. Ta však v tomto případě není 3-dimenzionální, ale jen 2-dimenzionální. „2-dimenzionální“ znamená, že získáme pozici na dvojrozměrném (idealizovaném) povrchu Země. Zjednodušeně řečeno se jako čtvrtý satelit použije střed Země, jeho vzdálenost od přijímače je poloměr Země. To ale opět vede k možným chybám, protože se velmi často nenacházíme na úrovni hladiny moře, ale trošku výše (např. v ČR).

## 3. Teorie relativity u GPS

Každého, kdo už o teorii relativity něco slyšel, muselo napadnout, že synchronizace času v satelitu a času na Zemi nebude zas až tak samozřejmě automatická. Protože se satelity GPS pohybují rychlostí přibližně 3,9 km/s, běží pro ně čas pomaleji než pro povrch Země, který je pro nás klidovou vztažnou soustavou. Tento efekt (*dilataci času*) podrobně popisuje speciální teorie relativity, která se zabývá především vztahy a fenomény mezi inerciálními systémy (tj. systémy, které se navzájem pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem nebo jsou v klidu). Z dilatace času vyplývá, že pohybující se hodiny jdou vždy pomaleji než hodiny v klidu.

Tento efekt je ale více než vyrovnán jiným efektem – a to ničím jiným než vlivem obecné teorie relativity. Ta se zabývá fenomény čtyřrozměrného časoprostoru, který je křiven všemi druhy energie, a tudíž i gravitací. Nás zajímá opět pouze problém běhu času, tentokrát v závislosti na gravitaci. Jeden z poznatků obecné teorie relativity postuluje, že čím vyšší je gravitační potenciál nějakého místa (čím blíže je zdroji této energie), tím pomaleji tam čas běží. V důsledku toho běží čas satelitů rychleji než čas na zemském povrchu. Tento efekt převládá nad efektem speciální teorie relativity, a tudíž jsou hodiny v satelitech nastaveny (ještě před startem na oběžnou dráhu) na trochu nižší frekvenci. Tím, že je vypustíme na oběžnou dráhu, se hodiny srovnají a běží stejně rychle jako všechny hodiny na Zemi.

### *3.1. Rozdíl v rychlosti běhu času*

3.1.1. Speciální teorie relativity

Satelity se pohybují relativní rychlostí $v = 3\,874$ m/s vůči zemskému povrchu. Pomocí jednoduché rovnice můžeme vypočítat tzv. faktor $\gamma$,

$\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, který určuje podíl přírůstku času $\Delta t$ v klidové a $\Delta t'$ v pohybující se vztažné soustavě:

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma = \Delta t' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t'} \doteq 1 - 0,835\,10^{-10}$$

3.1.2. Obecná teorie relativity

Satelity se nachází ve výšce 26 560 km nad středem Země. Pomocí další rovnice si spočítáme faktor $\gamma$,

$$\gamma = 1 + \frac{\kappa M_{\mathrm{Z}}(\frac{1}{R_{\mathrm{Z}}} - \frac{1}{R_{\mathrm{sat}}})}{c^2},$$

určující podíl přírůstku času mezi oběma gravitačními potenciály:

$$\Delta t = \Delta t' \cdot \gamma = \Delta t' \left(1 + \frac{\kappa M_{\mathrm{Z}}(\frac{1}{R_{\mathrm{Z}}} - \frac{1}{R_{\mathrm{sat}}})}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t'} \doteq 1 + 5,283\,10^{-10}$$

($\kappa$ je gravitační konstanta, $M_{\mathrm{Z}}$ je hmotnost Země, $R_{\mathrm{Z}}$ je poloměr Země, $R_{\mathrm{sat}}$ je poloměr kružnice, po níž obíhá satelit.)

3.1.3. Výsledný faktor $\gamma$

Výsledný koeficient $\gamma$ získáme vynásobením obou dílčích faktorů:

$$\gamma \doteq (1 + 5{,}283\,10^{-10}) \cdot (1 - 0{,}835\,10^{-10}) \doteq 1 + 4{,}449\,10^{-10}$$

*3.2. Jak velká by byla chyba bez zapojení teorie relativity?*

Kdybychom o těchto nutných korekcích nic nevěděli, přibližně jak nepřesný by byl systém GPS? Během jednoho intervalu $\Delta t$ by chyba narostla o $4{,}449\,10^{-10}\Delta t$, což v určení pozice znamená

$$4{,}449\,10^{-10}\,c = 13{,}3\ \mathrm{cm/s}.$$

Za hodinu už to bude téměř 500 metrů!

*3.3. Jak se to jednoduše dělá v praxi?*

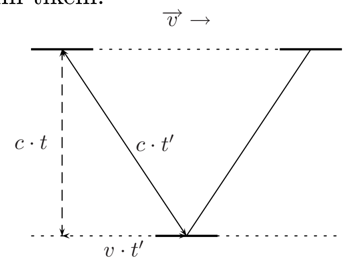
Frekvence satelitů se sníží z 10,23 MHz na 10,229 999 995 423 MHz a pak už není třeba se o nic starat, protože na Zemi se projevuje jako 10,23 MHz, což potřebujeme.

## 4. Příloha

*4.1. Odvození rovnice pro dilataci času pohybujících se objektů*

Vyjdeme ze známého příkladu pohybujících se světelných hodin. Ty se skládají z dvou paralelních zrcadel, mezi kterými neustále kmitá paprsek světla. Interval tam–zpět nazýváme jedním tikem.

Když se začnou tyto hodiny pohybovat kolmo na původní dráhu paprsku (obr. 5), dráha světla se prodlouží. Protože je rychlost světla konstantní, prodlouží se i jeden tik. Rychlost tohoto systému vůči klidovému je označena $v$, čas potřebný pro jeden tik v klidovém systému $t$, v pohybujícím se $t'$.



Obr. 5: Světelné hodiny

Z Pythagorovy věty vyplývá:

$$c^2 t'^2 = c^2 t^2 + v^2 t'^2$$

Odtud

$$t'^2 = \frac{c^2 t^2}{c^2 - v^2} = \frac{t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

a tedy

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

*4.2. Odvození rovnice pro dilataci času v gravitačním poli*

Foton, částice přenášející informace elektromagnetické interakce, je jednou z nejdůležitějších elementárních částic. Energie fotonu je dána dvěma vztahy: Einsteinovou relativistickou hmotností $E = mc^2$ a Planckovým zákonem $E = hf$ (Planckova konstanta $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js).

Tyto dvě energie se sobě rovnají, a tak můžeme určit hmotnost fotonu, která závisí pouze na jeho frekvenci:

$$E = m_f\, c^2 = hf, \qquad m_f = \frac{hf}{c^2}$$

(Fotony se neskládají z látky, jejich klidová hmotnost je nulová, jinak by se nemohly pohybovat rychlostí $c$.)

Podle Newtona je práce nutná k opuštění gravitačního pole Země rovna

$$W = \int_{R_\mathrm{Z}}^{R_\mathrm{sat}} \kappa \frac{M_\mathrm{Z}\, m_f}{r^2}\, \mathrm{d}r = \kappa M_\mathrm{Z} m_f \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right).$$

Když je foton (informace) odeslán k zemi, přijme energii

$$E' = E + \kappa M_\mathrm{Z} m_f \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right),$$

přičemž platí $E = hf$, $E' = hf'$ a $m_f = \frac{hf}{c^2}$. Takže platí

$$hf' = hf + \kappa M_\mathrm{Z} \frac{hf}{c^2} \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right),$$

kde $h$ můžeme zkrátit a $f$ vytknout:

$$f' = f \left(1 + \frac{\kappa M_\mathrm{Z} \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right)}{c^2}\right)$$

Místo frekvence se častěji používá čas:

$$\frac{1}{\Delta t'} = \frac{1}{\Delta t} \left(1 + \frac{\kappa M_\mathrm{Z} \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right)}{c^2}\right)$$

$$\Delta t = \Delta t' \left(1 + \frac{\kappa M_\mathrm{Z} \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right)}{c^2}\right)$$

$$\gamma = 1 + \frac{\kappa M_\mathrm{Z} \left(\frac{1}{R_\mathrm{Z}} - \frac{1}{R_\mathrm{sat}}\right)}{c^2}$$